Flot de Ricci sans borne supérieure sur la courbure et géométrie de certains espaces métriques

Thomas Richard [1]

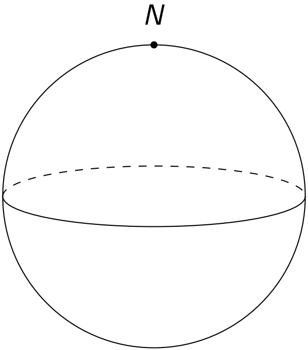
21 septembre 2012

1. Institut Fourier, Grenoble, France.

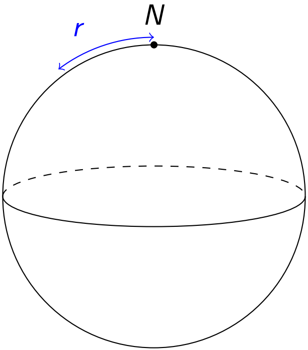
Plan

Plan

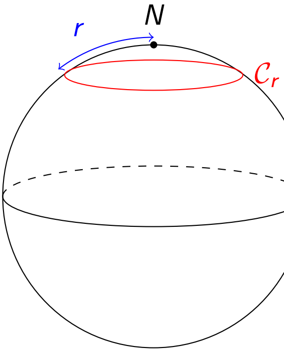
La sphère de dimension 2



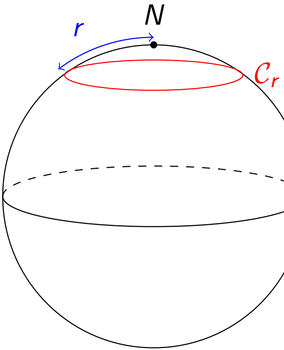
La sphère de dimension 2



La sphère de dimension 2



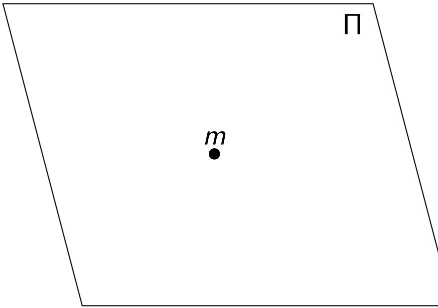
La sphère de dimension 2



$$\text{Longueur}(\mathcal{C}_r) = 2\pi \sin(r) = 2\pi r \left(1 - \frac{r^2}{6} + \dots\right)$$

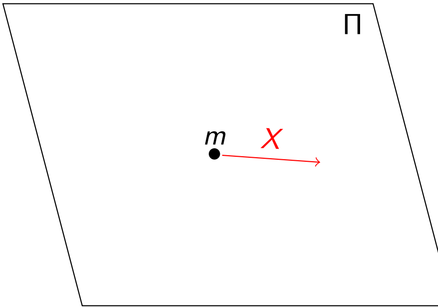
Courbure sectionnelle

(M^n, g) variété riemannienne de dimension n.
$m \in M$, Π plan dans $T_m M$.



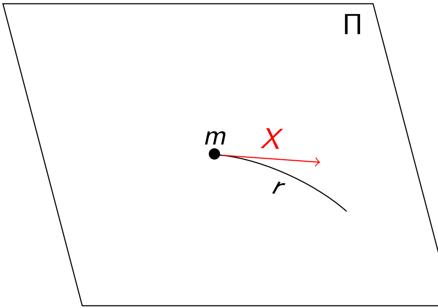
Courbure sectionnelle

(M^n, g) variété riemannienne de dimension n.
$m \in M$, Π plan dans T_mM.



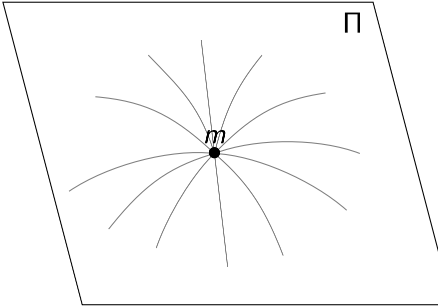
Courbure sectionnelle

(M^n, g) variété riemannienne de dimension n.
$m \in M$, Π plan dans T_mM.



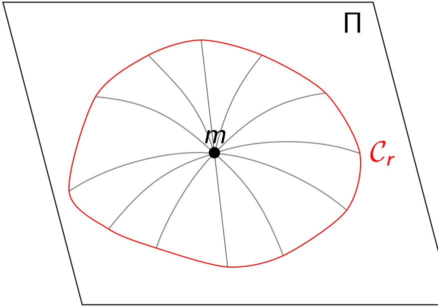
Courbure sectionnelle

(M^n, g) variété riemannienne de dimension n.
$m \in M$, Π plan dans $T_m M$.



Courbure sectionnelle

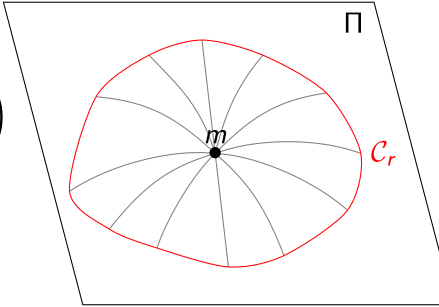
(M^n, g) variété riemannienne de dimension n.
$m \in M$, Π plan dans $T_m M$.



Courbure sectionnelle

(M^n, g) variété riemannienne de dimension n.
$m \in M$, Π plan dans T_mM.

$$\text{Longueur}(\mathcal{C}_r) = 2\pi r\left(1 - K(\Pi)\frac{r^2}{6} + \dots\right)$$

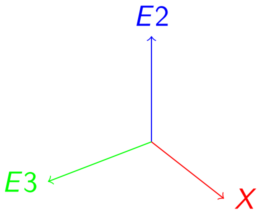


Définition

$K(\Pi)$: courbure sectionnelle de Π.

Courbure de Ricci

$X \in T_mM$ norme 1, $(X, E_2, \ldots, E_n)$ b.o.n de T_mM.

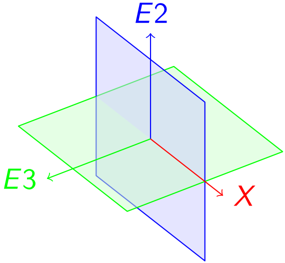


Courbure de Ricci

$X \in T_mM$ norme 1, $(X, E_2, \dots, E_n)$ b.o.n de T_mM.
Π_i plan engendré par X et E_i.

Définition

$\mathrm{Ric}(X, X) = K(\Pi_2) + \cdots + K(\Pi_n)$.



Courbure de Ricci

$X \in T_m M$ norme 1, $(X, E_2, \ldots, E_n)$ b.o.n de $T_m M$.
Π_i plan engendré par X et E_i.

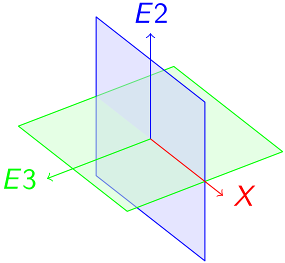
Définition

$\mathrm{Ric}(X, X) = K(\Pi_2) + \cdots + K(\Pi_n)$.

Ric est une forme quadratique sur $T_m M$.

Définition

Courbure scalaire : $\mathrm{Scal} = \mathrm{trace}(\mathrm{Ric})$.



Trois observations :

- (M^n, g) simplement connexe, K constante égale à 1 $\Rightarrow$ $(M^n, g) = (\mathbb{S}^n, can)$.
- (M^2, g) simplement connexe, $K > 0 \Rightarrow M^2 \simeq \mathbb{S}^2$.
- mais $(\mathbb{CP}^{\frac{n}{2}}, g_{FS})$, $\frac{1}{4} \leq K \leq 1$.

Question

(M^n, g) *à* $K > 0$, « *presque constante* » $\Rightarrow M^n \simeq \mathbb{S}^n$ *?*

Théorème (Berger,Klingenberg,60's)

(M^n, g) simplement connexe telle que :

$$\frac{1}{4} \leq K \leq 1.$$

Alors M est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^n$ ou isométrique à un espace symétrique compact de rang 1 ($\mathbb{CP}^{\frac{n}{2}}, \mathbb{HP}^{\frac{n}{4}}, \mathbb{C}a\mathbb{P}^2$).

Les variétés à $K > 0$ ou $K \geq 0$ sont difficiles à étudier. D'autres courbures ?

Proposition

Il existe un unique opérateur symétrique $\mathrm{R} : \Lambda^2 TM \to \Lambda^2 TM$, *vérifiant l'identité de Bianchi, tel que*

$$\langle \mathrm{R}(X \wedge Y), X \wedge Y \rangle = K(\Pi)$$

dès que X, Y *est une b.o.n de* Π.

Définition

R *est l'opérateur de courbure de* (M, g).

$\mathrm{R} \geq 0 \Rightarrow K \geq 0$, la réciproque est fausse !

Théorème (Gallot-Meyer,Micaleff-Moore,Mok, de 75 à 88)

$n \geq 4$, (M^n, g) compacte, simplement connexe, irréductible, à $\mathrm{R} \geq 0$. Alors :

- *M^n homéomorphe à la sphère,*

  ou
- *(M^n, g) Kählerienne et biholomorphe à $\mathbb{CP}^{\frac{n}{2}}$,*

  ou
- *(M^n, g) isométrique à un espace symétrique de type compact.*

Question

Dans les théorèmes précédents, peut-on remplacer M^n homéomorphe à la sphère par M^n difféomorphe à la sphère ?

Question

Peut-on se passer de l'hypothèse de simple connexité ?

Plan

Théorème (Hamilton,'83)

Soit (M^3, g) compacte telle que $\mathrm{Ric}_g > 0$. Alors il existe $\tilde{g}$ métrique sur M telle que $K_{\tilde{g}} = 1$.
En particulier, M^3 difféomorphe à un quotient de la sphère.

Théorème (Hamilton,'83)

Soit (M^3, g) compacte telle que $\mathrm{Ric}_g > 0$. Alors il existe $\tilde{g}$ métrique sur M telle que $K_{\tilde{g}} = 1$.
En particulier, M^3 difféomorphe à un quotient de la sphère.

Idée : flot de Ricci.

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t) = -2\,\mathrm{Ric}_{g(t)}$$

Déforme la métrique vers K constante.
Étape importante : $\mathrm{Ric}_g > 0 \Rightarrow \mathrm{Ric}_{g(t)} > 0$

Théorème (Böhm-Wilking,07)

(M^n, g) *compacte, irréductible,* $\mathrm{R} \geq 0$*. Alors :*

- M^n *admet une métrique à courbure sectionnelle constante* 1
  ou
- (M^n, g) *est Kählerienne et biholomorphe à* $\mathbb{CP}^{\frac{n}{2}}$*,*
  ou
- (M^n, g) *est localement symétrique.*

Théorème (Böhm-Wilking,07)

(M^n, g) compacte, irréductible, $\mathrm{R} \geq 0$. Alors :

- *M^n admet une métrique à courbure sectionnelle constante 1*
  ou
- *(M^n, g) est Kählerienne et biholomorphe à $\mathbb{CP}^{\frac{n}{2}}$,*
  ou
- *(M^n, g) est localement symétrique.*

Preuve par flot de Ricci.
Étape 1 : $\mathrm{R}_g \geq 0 \Rightarrow \mathrm{R}_{g(t)} \geq 0$.

Pourquoi $\mathrm{R}_{g(t)} \geq 0$?

$(M, g(t))$ flot de Ricci de (M, g), $\mathrm{R}_{g(t)}$ vérifie :
$\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial t} = \Delta \mathrm{R} + Q(\mathrm{R})$, où Q est une fonction explicite de R.

Pourquoi $\mathrm{R}_{g(t)} \geq 0$?

$(M, g(t))$ flot de Ricci de (M, g), $\mathrm{R}_{g(t)}$ vérifie :
$\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial t} = \Delta \mathrm{R} + Q(\mathrm{R})$, où Q est une fonction explicite de R.

Théorème (Principe du maximum.)

$u : M \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $u(x,0) \geq 0$ et

$$\partial_t u = \Delta u + F(u),$$

et $F(u) \geq 0$ quand $u \geq 0$. Alors $u(x,t) \geq 0$ pour tout t.

Principe du maximum d'Hamilton $\Rightarrow$ ça marche aussi pour R !
Puis Hamilton montre : $\mathrm{R} \geq 0 \Rightarrow Q(\mathrm{R}) \geq 0$. □

Plan

$\mathrm{R} \geq 0 \Rightarrow M^n$ connue.

Question

Et si $\mathrm{R} \geq -\varepsilon$ *?*

Remarque

(M^n, g), $K = -1 \Rightarrow (M^n, \lambda g)$, $K_{\lambda g} = -\frac{1}{\lambda}$.
Restrictions géométriques sur (M^n, g) *nécessaires.*

Théorème (R. '11)

Pour tout $i > 0, D > 0$, $n \in \mathbb{N}$, *il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que tout* (M^n, g) *satisfaisant*

1. $\mathrm{inj}(g) \geq i$
2. $\mathrm{diam}(M, g) \leq D$
3. $\mathrm{R}_g \geq -\varepsilon$

admet une métrique à $\mathrm{R} \geq 0$.

On raisonne par l'absurde.

On raisonne par l'absurde. Soient $i > 0$, $D > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et (M_k, g_k) une suite de variétés vérifiant :

- $\mathrm{inj}(M_k, g_k) \geq i$,
- $\mathrm{diam}(M_k, g_k) \leq D$,
- $\mathrm{R}_{g_k} \geq -\varepsilon_k$, où ε_k tend vers 0

et qu'aucune des variétés n'admet de métrique à $\mathrm{R} \geq 0$.

On raisonne par l'absurde. Soient $i > 0$, $D > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et (M_k, g_k) une suite de variétés vérifiant :

- $\mathrm{inj}(M_k, g_k) \geq i$,
- $\mathrm{diam}(M_k, g_k) \leq D$,
- $\mathrm{R}_{g_k} \geq -\varepsilon_k$, où ε_k tend vers 0

et qu'aucune des variétés n'admet de métrique à $\mathrm{R} \geq 0$.

À extraction près, (M_k, g_k) converge vers (M_∞, g_∞) où g_∞ est une métrique $C^{0,\alpha}$ (Anderson-Cheeger).

Les M_k sont difféomorphes à M_∞ pour k assez grand.
Si g_∞ était lisse et $\mathrm{R}_{g_\infty} \geq 0$, ok.

Problème

g_∞ $C^{0,\alpha}$ $\Rightarrow$ *courbures pas définies.*

Les M_k sont difféomorphes à M_∞ pour k assez grand.
Si g_∞ était lisse et $\mathrm{R}_{g_\infty} \geq 0$, ok.

Problème

g_∞ $C^{0,\alpha}$ $\Rightarrow$ *courbures pas définies.*

Solution

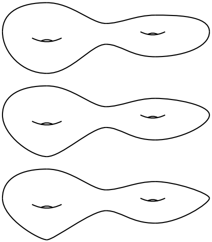
Régulariser les g_k à l'aide du flot de Ricci.

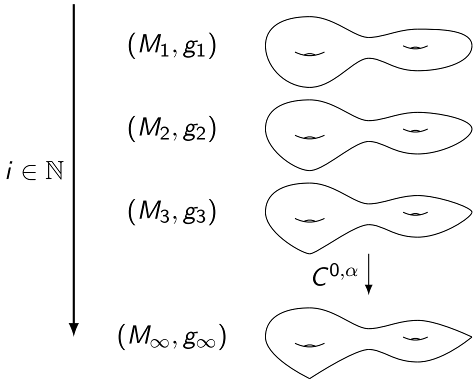
$i \in \mathbb{N}$

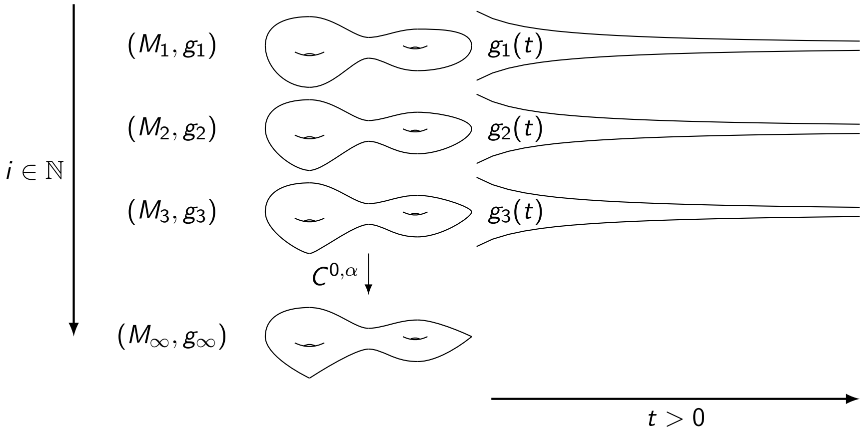
(M_1, g_1)

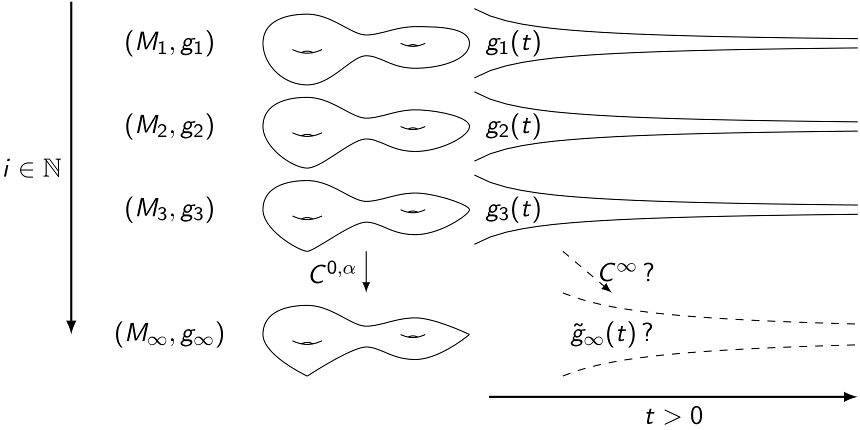
(M_2, g_2)

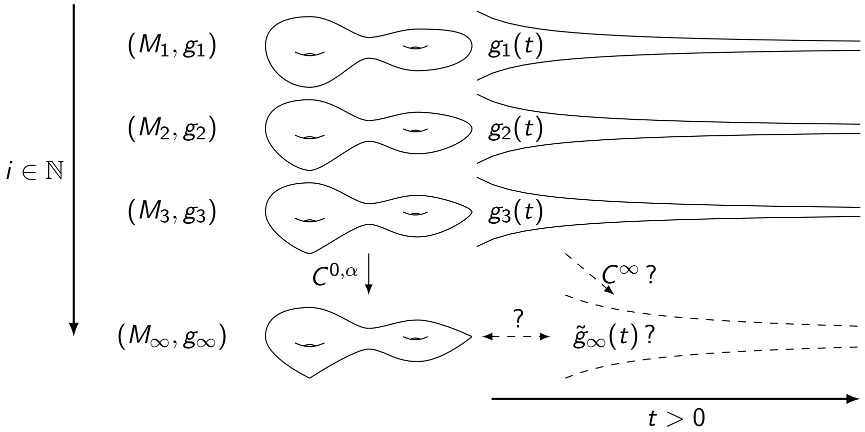
(M_3, g_3)



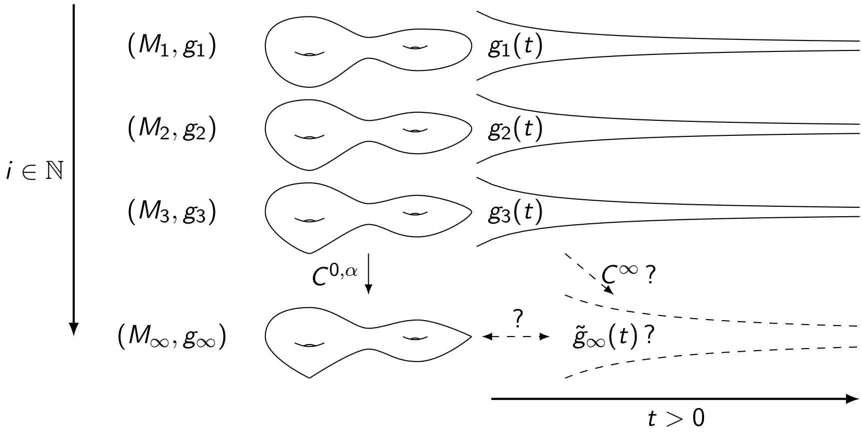

$i \in \mathbb{N}$
(M_1, g_1)
(M_2, g_2)
(M_3, g_3)
$C^{0,\alpha}$
(M_∞, g_∞)


$i \in \mathbb{N}$
(M_1, g_1)
$g_1(t)$
(M_2, g_2)
$g_2(t)$
(M_3, g_3)
$g_3(t)$
$C^{0,\alpha}$
(M_∞, g_∞)
$t > 0$


$i \in \mathbb{N}$
(M_1, g_1)
$g_1(t)$
(M_2, g_2)
$g_2(t)$
(M_3, g_3)
$g_3(t)$
$C^{0,\alpha}$
C^∞ ?
(M_∞, g_∞)
$\tilde{g}_\infty(t)$?
$t > 0$

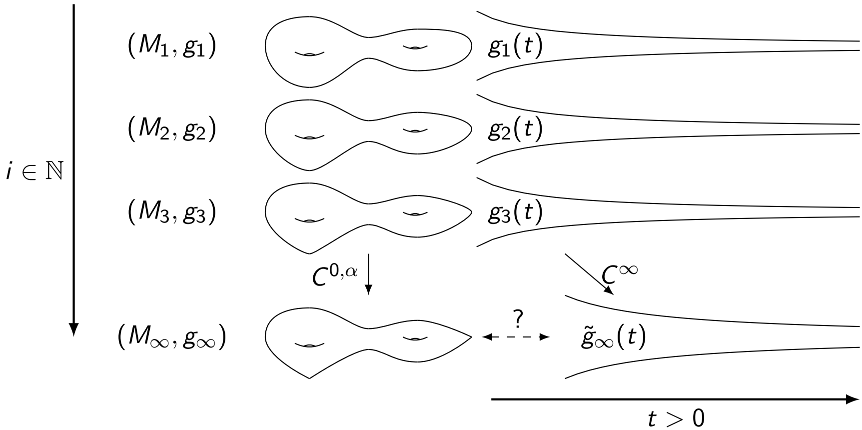


$i \in \mathbb{N}$
(M_1, g_1)
$g_1(t)$
(M_2, g_2)
$g_2(t)$
(M_3, g_3)
$g_3(t)$
$C^{0,\alpha}$
C^{∞} ?
?
(M_∞, g_∞)
$\tilde{g}_\infty(t)$?
$t > 0$



Un théorème de Perelman donne :

$$|\,\mathrm{R}_{g_k(t)}\,| \leq A/t + B \text{ et } \operatorname{inj}(g_k(t_0)) \geq \delta.$$



Un théorème de Perelman donne :

$$|\,\mathrm{R}_{g_k(t)}\,| \leq A/t + B \text{ et } \mathrm{inj}(g_k(t_0)) \geq \delta.$$

$\Rightarrow$ les flots $(M_k, g_k(t))$ convergent de façon C^∞ vers $(\tilde{M}_\infty, \tilde{g}_\infty(t))$.

Reste à montrer : $\mathrm{R}_{\tilde{g}_\infty(t)} \geq 0$.

Théorème (R. '11)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A \in (0, \frac{1}{4})$, $B > 0$, *il existe* $T > 0$, $K > 0$ *tels que si* $(M^n, g(t))_{t \in [0,T')}$ *flot de Ricci :*

1. $|\mathrm{Scal}(g(t))| \leq A/t + B$ *pour* t *dans* $(0, T')$,
2. $\mathrm{R}_{g(0)} \geq -\varepsilon$ *en* $t = 0$ *pour un certain* $\varepsilon \in [0, 1]$,

on a :

$$\mathrm{R}_{g(t)} \geq -K\varepsilon$$

pour $t \in [0, T') \cap [0, T)$.

1. assuré par le théorème de Perelman.

Fin de la preuve

Les flot $g_k(t)$ vérifient :

- $\mathrm{R}(g_k(0)) \geq -\varepsilon_k$,
- $|\mathrm{Scal}(g_k(t))| \leq A/t + B$.

Donc $\mathrm{R}_{g_k(t)} \geq -K\varepsilon_k$ sur un intervalle indépendant de k.

Convergence C^∞ des $g_k(t)$ vers $\tilde{g}_\infty(t) \Rightarrow \mathrm{R}_{\tilde{g}_\infty(t)} \geq 0$. $\square$

Preuve de la minoration de R

Soit :

$$\mathsf{L} = \mathsf{R} + \varepsilon(1 + \beta t + t\alpha\, \mathsf{Scal})\, \mathsf{I},$$

α, β constantes, I l'identité.
Il suffit de montrer que $\mathsf{L}(x, t) \geq 0$.

Preuve de la minoration de R

Soit :

$$\mathrm{L} = \mathrm{R} + \varepsilon(1 + \beta t + t\alpha \,\mathrm{Scal})\,\mathrm{I},$$

α, β constantes, I l'identité.
Il suffit de montrer que $\mathrm{L}(x, t) \geq 0$. L vérifie :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial t} &= \Delta \mathrm{L} + Q(\mathrm{R}) + \varepsilon(\beta + \alpha \,\mathrm{Scal} + 2t\alpha |\,\mathrm{Ric}\,|^2)\,\mathrm{I} \\ &= \Delta \mathrm{L} + N(\mathrm{L}).\end{aligned}$$

Par le principe du maximum d'Hamilton, il faut :

$$\mathrm{L} \geq 0 \Rightarrow N(\mathrm{L}) \geq 0.$$

$$N(\mathrm{L}) = (N(\mathrm{L}) - Q(\mathrm{L})) + Q(\mathrm{L}).$$

$Q(\mathrm{L}) \geq 0$, il faut donc $N(\mathrm{L}) - Q(\mathrm{L}) \geq 0$.

$$N(\mathrm{L}) = (N(\mathrm{L}) - Q(\mathrm{L})) + Q(\mathrm{L}).$$

$Q(\mathrm{L}) \geq 0$, il faut donc $N(\mathrm{L}) - Q(\mathrm{L}) \geq 0$.

$\varphi = \varepsilon(1 + \beta t + t\alpha \operatorname{Scal})$, $\mathrm{L} = \mathrm{R} + \varphi \mathrm{I}$,

$$N(\mathrm{L}) - Q(\mathrm{L}) = Q(\mathrm{R}) - Q(\mathrm{R} + \varphi \mathrm{I}) + \varepsilon(\beta + \alpha \operatorname{Scal} + 2t\alpha |\operatorname{Ric}|^2)\mathrm{I}$$

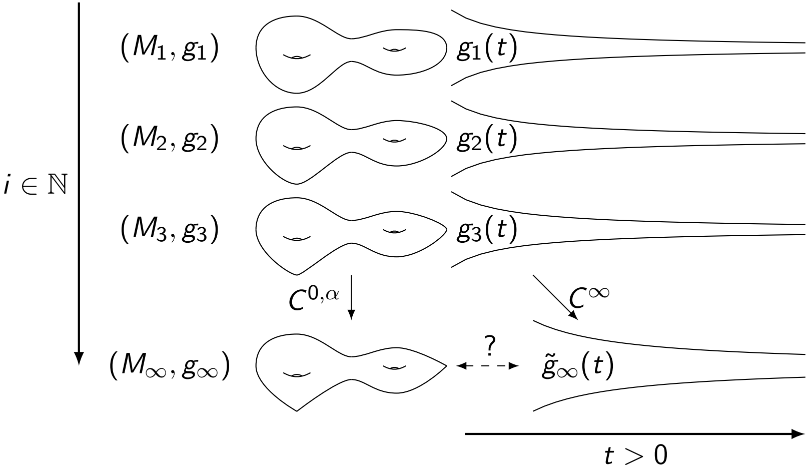
$$N(\mathrm{L}) = (N(\mathrm{L}) - Q(\mathrm{L})) + Q(\mathrm{L}).$$

$Q(\mathrm{L}) \geq 0$, il faut donc $N(\mathrm{L}) - Q(\mathrm{L}) \geq 0$.

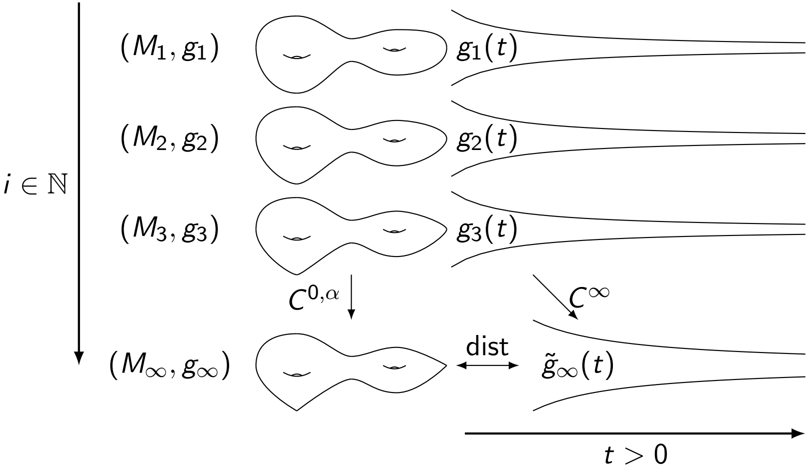
$\varphi = \varepsilon(1 + \beta t + t\alpha \,\mathrm{Scal})$, $\mathrm{L} = \mathrm{R} + \varphi\,\mathrm{I}$,

$$N(\mathrm{L}) - Q(\mathrm{L}) = Q(\mathrm{R}) - Q(\mathrm{R} + \varphi\,\mathrm{I}) + \varepsilon(\beta + \alpha\,\mathrm{Scal} + 2t\alpha|\,\mathrm{Ric}\,|^2)\,\mathrm{I}$$

Böhm et Wilking :
$Q(\mathrm{R}) - Q(\mathrm{R} + \varphi\,\mathrm{I}) = -2\varphi\,\mathrm{Ric}(\mathrm{R}) \wedge \mathrm{id} - (n-1)\varphi^2\,\mathrm{I}$.
On conclut en ajustant α et β pour que $N(\mathrm{L}) - Q(\mathrm{L}) \geq 0$. $\square$



$i \in \mathbb{N}$
(M_1, g_1)
$g_1(t)$
(M_2, g_2)
$g_2(t)$
(M_3, g_3)
$g_3(t)$
$C^{0,\alpha}$
C^∞
?
(M_∞, g_∞)
$\tilde{g}_\infty(t)$
$t > 0$



$(\tilde{M}_\infty, \tilde{g}_\infty(t))$ est un flot de Ricci de (M_∞, g_∞) : les distances $d_{\tilde{g}_\infty(t)}$ convergent uniformément vers une distance qui rend $\tilde{M}_\infty$ isométrique à (M_∞, g_∞).

Plan

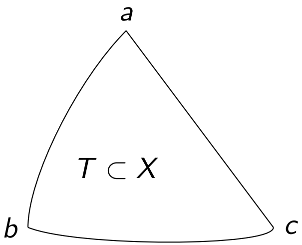
Question

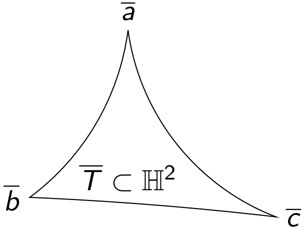
Peut on construire un flot de Ricci pour d'autres classes d'objets géométriques peu lisses ?

Ici (X, d) surface topologique compacte, d distance géodésique.

Définition (Informelle)

(X, d) est à courbure plus grande que -1 au sens d'Alexandrov si les triangles géodésiques dans X sont plus « gras » que les triangles correspondants dans le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$.

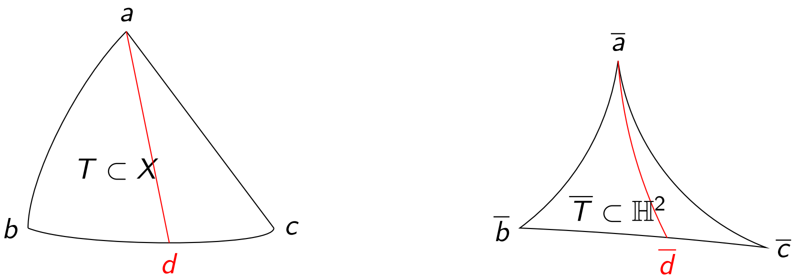




Ici (X, d) surface topologique compacte, d distance géodésique.

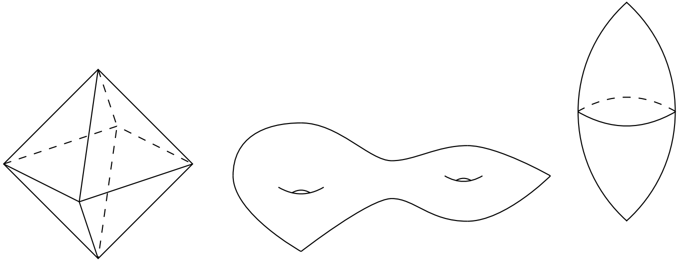
Définition (Informelle)

(X, d) est à courbure plus grande que -1 au sens d'Alexandrov si les triangles géodésiques dans X sont plus « gras » que les triangles correspondants dans le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$.



Exemples

- Surface de polyèdres convexes
- Limites de suites de surfaces à courbure minorée, volume minoré et diamètre majoré.



Théorème

(X, d) surface à courbure minorée par -1. Il existe un unique flot de Ricci $(M^2, g(t))_{t\in(0,T)}$ tel que :

- $K_{g(t)} \geq -1$,
- *quand t tend vers 0, $d_{g(t)}$ converge vers $\tilde{d}$ telle que $(M^2, \tilde{d})$ est isométrique à (X, d).*

Corollaire

(M_i, g_i) et (M, g) surfaces à courbure minorée. Alors :

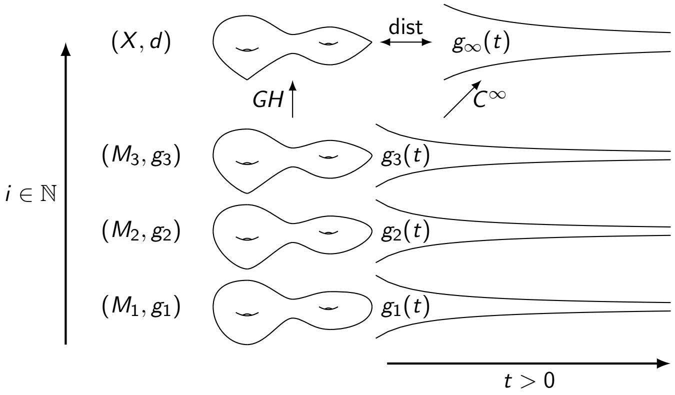
$$(M_i, g_i) \xrightarrow[i\to\infty]{GH} (M, g) \Rightarrow (M_i, g_i(t)) \xrightarrow[i\to\infty]{C^\infty} (M, g(t)).$$

Existence

(X, d) peut s'approcher des surfaces lisses (M_i, g_i) à courbure minorée, diamètre majoré et volume minoré (Alexandrov).

Existence

(X, d) peut s'approcher des surfaces lisses (M_i, g_i) à courbure minorée, diamètre majoré et volume minoré (Alexandrov).



Unicité

En dimension 2 : $g(t) = w(t)h$ et $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \Delta_h \log w - 2K_h$.

Théorème (Reshetnyak)

(X, d) surface à courbure minorée. Alors d provient d'une « métrique riemannienne » sur X de la forme $w_0 h_0$ où h_0 est une métrique lisse et w_0 une fonction L^1.
Si $w_0' h_0'$ est une autre métrique dont provient d alors h_0 et h_0' sont conformes et $w_0 h_0 = w_0' h_0'$.

h et h_0 sont conformes, on se ramène à $h = h_0$. Alors :

$$w(t) \xrightarrow[t\to 0]{L^1} w_0.$$

Problème d'unicité pour une EDP à condition initiale L^1...

Perspectives

- A-t-on unicité pour les surfaces à courbure intégrale bornée ? et pour des espaces de dimension plus grande ?
- Pour les variétés à courbure presque positive, peut on se passer de l'hypothèse sur le rayon d'injectivité ?
- Quid des variétés Kähleriennes à courbure bisectionnelle presque positive ?
- Mieux comprendre les différentes conditions de courbures préservées par le flot de Ricci.

Merci !