Université Paris–Est–Créteil
Année 2010-2011

Licence de mathématiques L3
Analyse Numérique

Examen du 5 mai 2011

Tous documents interdits

Durée : 2 heures

Notations

On note $K^{m\times n}$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à cœfficients dans K ($K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, on note $A^\star$ l'adjointe de A, soit $A^\star = {}^t\overline{A}$. On note également I ou I_n la matrice identité.

Pour $x,y\in\mathbb{C}^n$, on notera $(x,y)=x^\star y$ leur produit hermitien et $\|x\|=\sqrt{x^\star x}$.

Pour $p\geq 1$, on note $\mathrm{Vect}_K(x_1,\ldots,x_p)$ le K-espace vectoriel engendré par $x_1,\ldots,x_p\in K^n$.

Cours

Donner, sans le démontrer, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice inversible se décompose sous la forme LU avec L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure.

Donner un contre exemple.

Exercice 1

Soit $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\1&0\end{bmatrix}$.

1. Donner le rang de A et une base de $\mathrm{Im}(A)$.

2. Orthonormaliser les vecteurs colonnes de A. Déterminer les matrices $Q\in\mathbb{R}^{3\times 2}$ et $R\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ triangulaire supérieure telles que $A=QR$ et ${}^tQQ=I_2$.

3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}({}^tA)$.

Exercice 2

1. Effectuer la décomposition de Cholesky de

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&1\\-2&5&2\\1&2&18\end{bmatrix}.$$

2. En déduire A^{-1}.

Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 2a & 1 \\ 0 & 1 & 3a \end{bmatrix}.$$

1. Soit $b \in \mathbb{R}^3$. Écrire les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel (en particulier les décompositions régulières $A = M - N$ associées) pour inverser le système $Ax = b$.

2. Montrer que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent si $a > \sqrt{2/3}$.

Problème

Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et $u \in \mathbb{C}^n$ un vecteur *unitaire*. On note pour tout $x \in \mathbb{C}^n$

$$R_A(x) = (x, Ax) = x^\star Ax.$$

1. (a) On pose $P = uu^\star$. Montrer que P est une représentation matricielle de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(u)$.

(b) Montrer que $R_A(u)$ est une valeur propre de PAP associée au vecteur propre u. Quelles sont les autres valeurs propres de PAP ?

2. On suppose maintenant A diagonalisable. On désigne par $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq n}$ ses valeurs propres. Soit $\mu \in \mathbb{C}$ *non valeur propre* de A.

L'objet de cette question est d'établir le résultat suivant : il existe λ_i valeur propre de A telle que

$$(1) \qquad |\lambda_i - \mu| \leq |||Q||| \, |||Q^{-1}||| \; \|Au - \mu u\|,$$

où $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ inversible telle que $A = QDQ^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et où $||| \cdot |||$ désigne une norme matricielle compatible avec la norme $\| \cdot \|$.

(a) Soit $r = Au - \mu u$. Exprimer r en fonction de $D - \mu I$ et u.

(b) Montrer que $D - \mu I$ est inversible et que

$$|||(D - \mu I)^{-1}||| = \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i - \mu|}$$

(c) En déduire (1).

3. Soit A une matrice hermitienne. Montrer que pour tout $\mu \in \mathbb{C}$ et pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ de norme 1, il existe au moins une valeur propre λ_i de A telle que

$$|\lambda_i - \mu| \leq \|Ax - \mu x\|.$$