CURRICULUM VITAE ET ACTIVITÉS

Lingmin LIAO

Situation professionnelle : Maître de Conférences (classe normale, 6e échelon)
à l'Université de Paris-Est Créteil (UPEC)
Qualifié au poste de Professeur des universités dans les sections CNU : 25 et 26

Pageweb :	http ://perso-math.univ-mlv.fr/users/liao.lingmin/
Laboratoire :	**Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées (LAMA)**
	Faculté des Sciences et Technologie
	Université Paris-Est Créteil
	Bâtiment P3 4ème étage Bureau 417
	61, avenue du Général de Gaulle
	94 010 CRÉTEIL Cedex

Sommaire

1. Informations personnelles

Date de naissance :	01/09/1981
Nationalité :	Chinoise
État Civil :	Marié, un enfant (2018)
Adresse :	9 Place Jean Giraudoux, 94000 Créteil
Téléphone :	+33 (1) 45 17 16 53
Fax :	+33 (1) 45 17 16 49
Courriel :	lingmin.liao@u-pec.fr
Pageweb :	https ://perso.math.u-pem.fr/liao.lingmin/

Domaines de recherche :

— Analyse multifractale des systèmes dynamiques
— Théorie métrique des nombres et approximation diophantienne
— Systèmes dynamiques sur le corps des nombres p-adiques
— Numération, fractions continues, β-transformations
— Conjecture de Fuglede dans les espaces p-adiques

2. Parcours scientifique

12/12/2017 :	Habilitation à diriger des recherches, Université Paris-Est. **Différents aspects de systèmes dynamiques réels et p-adiques**. Président : Pierre ARNOUX ; Rapporteurs : Julien BARRAL, Charles FAVRE, Marc POLLICOTT ; Examinateurs : Valérie BERTHÉ, Yann BUGEAUD, Stéphane SEURET.
Depuis le 01/09/2010 :	Maître de Conférences, LAMA, Université Paris-Est Créteil.
2009 - 2010 :	ATER, LAMA, Université Paris-Est Créteil.
2008 - 2009 :	ATER, LMPT, Université François Rabelais de Tours.
2005 - 2008 :	Thèse de l'Université de Picardie Jules Verne (soutenue le 20 mai 2008) : **Études sur la Récurrence de Certains Systèmes Dynamiques Topologiques et Arithmétiques**. (198 pages) Directeur : Ai-Hua FAN ; Président : Jean-Pierre KAHANE ; Rapporteurs : Yann BUGEAUD, Jörg SCHMELING ; Examinateurs : Jean-Luc CHABERT, Fabien DURAND, Bernard HOST.
1999 - 2005 :	Licence, Maîtrise, Aspirant chercheur (Master) Département de mathématiques, Université de Wuhan, Chine

3. Distinctions, projets, responsabilités scientifiques et administratives

PEDR, délégation au CNRS, CRCT

— Obtention de la PEDR, classé A (2013-2016, 2017-2020, 2021-2024).
— Demi-délégation CNRS (2013, 2015, 2019).
— CRCT, 6 mois (2021)

Participations à des projets scientifiques

— ANR Mutadis 2012-2016.
— GDR Analyse multifractale 2012-2020.
— PHC Orchid France-Taïwan 2012-2013 (Chef de Projet).
— BREUDS Brazil-Europe 2012-2016.
— PHC Cai Yuanpei France-Chine 2017-2018.
— PHC Star France-Corée du Sud 2017-2018.
— PHC Orchid France-Taïwan 2020-2021 (Chef de Projet).
— PHC Polonium France-Pologne 2020-2021 (Chef de Projet).

Organisation des conférences, séminaires

— co-organisateur avec Nicolae Mihalache du *Séminaire COOL* en systèmes dynamiques (à l'IHP, mensuel) 2015/16 et depuis 2018.
— co-organisateur avec Thomas Richard du *Colloquium de Créteil* (mensuel) 09/2016-01/2022.
— co-organisateur avec A. Fan et S. Fan du colloque *"Dynamical systems and related topics I"*, juillet 24-28, 2017 à Wuhan, trentaines participants.
— co-organisateur avec Y. Bugeaud et D. H. Kim du colloque *"Diophantine Approximation and related topics"*, janvier 18-19, 2018 à Créteil, 29 participants.
— co-organisateur avec A. Fan et S. Fan du colloque *"Dynamical systems and related topics III"*, août 20-23, 2019 à Wuhan, trentaines participants.

Investissement local

— membre du conseil de laboratoire depuis 05/2020.
— mise en place du site web d'enseignement des mathématiques 2015-2017.
— responsable de la bibliothèque LAMA-Créteil depuis 2013.
— responsable des vacataires du département, depuis 2018.

Participation à des comités de sélection pour le recrutement de MCF

— Université Paris-Est Créteil, 2014, 2015, 2016, 2022.

Participation à un jury de thèse

— Florent NGUEMA NDONG, *Étude de la Dynamique Symbolique des Développements en Base Négative, Système de Lyndon*, Université de Poitiers, septembre, 2013.

Activités d'expertise

— Rapporteur d'un projet de recherche pour Israel Science Foundation,
— Rapporteur d'un projet de recherche pour National Science Centre Poland,
— Évaluateur pour les Bourses FRANCE L'Oréal-UNESCO Pour les Femmes et la Science, depuis 2017,
— Évaluateur pour L'Oréal-UNESCO For Women in Science Sub-Saharan Africa regional programme, 2019,
— Évaluateur pour le Prix L'Oréal-Unesco pour les Femmes et la Science, 2020,
— Rapporteur pour MathSciNet et Zentralblatt,
— Rapporteur pour 45 revues internationales dont :
Inventiones Mathematicae ; Memoirs of the American Mathematical Society ; Advances in Mathematics ; International Mathematics Research Notices ; Chaos ; Communications in Mathematical Physics ; Ergodic Theory and Dynamical Systems ; Journal of Functional Analysis ; Mathematische Zeitschrift ; Science China ; The Asian Journal of Mathematics ; Journal of Fractal Geometry ; Discrete Continuous Dynamical Systems ; Monatshefte für Mathematik.

Encadrements de TER de M1 et mémoires de M2

— Master 1 en mathématiques :
- Grandes Déviations, 2011/12
- Lemme de Borel-Cantelli, 2012/13
- Retenues, mélanges de cartes et matrice incroyable, 2013/14
- Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, 2014/15
- Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$, 2014/15
- Transformée de Fourier sur un groupe abélien localement compact, 2016/17
- Structure de la percolation de Mandelbrot, 2016/17
- Sommes de Gauss et nombre de solutions des équations, 2019/20
- Points recouverts par des petits intervalles aléatoires, 2021/22

— Mémoire du Master 2 :
- Kévin RIOU-NIVERT, *Théorie ergodique de la marche aléatoire sur arbre et dimension de Hausdorff*, 2014/2015. -
- Yaoqiang LI, *Bernoulli-type measures related to bêta-expansions*, 2017/2018.

4. Encadrements de thèses

__**Thèses soutenues**__

(1) **Ruxi SHI**, *Ensembles et mesures spectrales et conjecture de Fuglede.*
Ancien élève normalien (Ulm), Contrat doctoral du Ministère de l'Education Nationale
en cotutelle avec Ai-Hua FAN (Université de Picardie Jules Verne) **soutenue le 26/06/2018**.
Postdoc à Université d'Oulu, Institute of Mathematics (Varsovie), et à Paris-Sorbonne.

(2) **Ali AHMAD**, *Mesures de Gibbs p-adiques sur les arbres de Cayley et systèmes dynamiques sur le corps des nombres p-adiques.*
Boursier de l'Ambassade de France en Malaisie et bourse Labex Bézout, séjours en France du 01/10/2016 au 31/03/2018
en cotutelle avec Mansoor SABUROV et Chin Hee PAH (Université Islamique Internationale de Malaisie), et Arnaud LE NY (Université Paris-Est Créteil), **soutenue le 29/08/2019**.
Lecteur à Universiti Teknologi Malaysia.

(3) **Wanlou WU**, *Dimension de Hausdorff dans des systèmes dynamiques non-uniformément hyperboliques.*
Boursier du China Scholarship Council, séjours en France du 08/10/2017 au 07/10/2019
en cotutelle avec Dawei YANG (Université de Soochow, Chine) **soutenue le 31/10/2019**.
Professeur associé à Jiangsu Normal University

(4) **Lixuan ZHENG**, *Bêta-développements et propriétés fractales.*
Boursière du China Scholarship Council, séjours en France du 29/09/2017 au 28/09/2019
en cotutelle avec Min WU (Université de technologie de Chine méridionale, Chine) **soutenue le 18/12/2019**.
Lectrice à Guangdong University of Finance and Economics

(5) **Kunkun SONG**, *Certaines contributions à l'analyse multifractale en théorie des fractions continues et à la transformée de Fourier des mesures.*
Boursier du China Scholarship Council, séjours en France du 27/09/2018 au 26/09/2020
en cotutelle avec Jihua MA (Université de Wuhan, Chine) **soutenue le 05/12/2020**.
Lecteur à Hunan Normal University.

__**Thèses en cours**__ :

(1) **Qian ZHANG**, *Analyse multifractale multivariée.*
Contrat doctoral du Ministère de l'Education Nationale
en cotutelle avec Stéphane JAFFARD (Université Paris-Est Créteil) **depuis le 20/09/2021**.

(2) **Yubin HE**, *Quelques études sur les points bien approchés dans des ensembles de type de Cantor.*

Boursier du China Scholarship Council, séjours en France du 14/10/2021 au 13/10/2023 en cotutelle avec Ying XIONG (Université de technologie de Chine méridionale, Chine) **depuis le 14/10/2021**.

(3) **Jing FENG**, *Problèmes fractals dans l'approximation diophantienne uniforme.* Boursière du China Scholarship Council, séjours en France du 18/11/2021 au 17/11/2023 en cotutelle avec Jian XU (Université des Sciences et Technologie de Huazhong, Chine) **depuis le 18/11/2021**.

5. Collaborations internationales

Collaborateurs principaux avec des projets en cours :

(1) **Yann Bugeaud**, Professeur, Université de Strasbourg, sur *l'approximation diophantienne*

(2) **Ai-Hua Fan**, Professeur, Université de Picardie, sur *l'analyse multifractale, les systèmes dynamiques p-adiques, et la conjecture de Fuglede*

(3) **Shi-Lei Fan**, Professeur associé, Central China Normal University, Chine, sur *les systèmes dynamiques p-adiques et la conjecture de Fuglede*

(4) **Dong Han Kim**, Professeur, Université de Dongguk, Corée du Sud, sur *l'approximation diophantienne*

(5) **Michal Rams**, Professeur associé, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Pologne, sur *l'analyse multifractale et l'approximation diophantienne*

Autres collaborateurs :
Mohd Ali Khameini AHMAD, Arnaud LE NY, Vanessa BARROS, Thomas JORDAN, Henna KOIVUSALO, Bing LI, Seul Bee LEE, Ji-Hua MA, Tomas PERSSON, Jacques PEYRIERE, Yanqi QIU, Utkir ROZIKOV, Jérôme ROUSSEAU, Mansoor SABUROV, Stéphane SEURET, Ronggang SHI, Ruxi SHI, Wolfgang STEINER, Omri SOLAN, Nattalie TAMAM, Sanju VELANI, Bao-Wei WANG, Yue-Fei WANG, Meng WU, Jun WU, Dan ZHOU, Evgeniy ZORIN.

6. Séjours, invitations, conférences et séminaires

Séjours de recherche

- En collaboration avec Ai-Hua Fan, Shilei Fan, j'étais invité à l'Université Normale Centrale de Chine, **Chine** pour trois semaines en 2014, un mois en 2017 (PHC Cai Yuanpei), deux semaines en 2018 (PHC Cai Yuanpei).
- En collaboration avec Michal Rams, j'étais invité à l'Institut de Mathématiques, Académie polonaise des Sciences, **Pologne** pour deux semaines en 2013, un mois en 2015, dix jours en 2018.
- En collaboration avec Dong Han Kim, j'étais invité à l'Université de Suwon puis à l'Université de Dongguk, **Corée du Sud** : un mois en 2009, un mois en 2010 et dix jours en 2018 (PHC Star).
- En collaboration avec Jung-Chao Ban, j'étais invité au Centre National pour les Sciences Théoriques à **Taïwan** pour un mois en 2012 (PHC Orchid) et un mois en 2013 (PHC Orchid).
- En collaboration avec Jérôme Rousseau, j'étais invité à Universidade Federal de Bahia, **Brésil** pour deux semaines en 2014 (BREUDS), et deux semaines en 2016 (BREUDS).
- J'ai effectué également des séjours à l'Institut de Mathématiques, Académie Chinoise des Sciences, à l'Université de Fudan, à l'Université de Technologie de Chine Méridionale, à l'Université Huazhong des Sciences et de la technologie, à l'Université de Shenzhen en **Chine**, à l'Université de Lund, à l'Université de Växjö en **Suède**, à l'Université Internationale Islamique de Malaisie, en **Malaisie**.

Exposés aux conférences

En 2022 :

1. invité pour un exposé de 45 minutes **International Conference of Chinese Mathematicians**, Beijing.
2. invité pour une conférence plénière au congrès **Fractals and Related Fields 4**, Porquerolles, France.

En 2021 :

1. **8th International Conference on p-adic Mathematical Physics and its Applications**, par zoom

En 2020 :

1. **One-World Fractals and related fields seminar**, Sur BigBlueButton, France

En 2019 :

1. Equidistribution : Arithmetic, Computational and Probabilistic Aspects, National University of Singapore, Singapour
2. **2019 NCTS Workshop on dynamical systems**, National Center for Theoretical Sciences, Taipei, Taïwan
3. **Numeration 2019**, Erwin Schrödinger Institut, Vienna, Autriche
4. Number Theory and Dynamics, Manhae Maul, Corée du Sud
5. Groupe de Recherche Analyse Multifractale, Domaine des Ardennes, Belgique
6. Topological and probabilistic methods in low dimensional dynamics, Shanghai Center for Mathematical Sciences, Shanghai, Chine

En 2018 :

1. Journées du GDR Analyse Multifractale, Chalès, France
2. Workshop on Dynamical systems and related topics, Wuhan, Chine
3. Workshop on Determinant and Stochastic Dynamical systems, Dalian, Chine
4. The final conference of the LAMBDA project, Toulouse, France

En 2017 :

1. Journées du GDR Analyse Multifractale, Porquerolles, France
2. Workshop on Diophantine approximation and Dynamical systems, Wuhan, Chine
3. Number Theory and Dynamics, Muuido, Corée du Sud
4. Biduum Limoges/Clermont "Théorie des nombres", Limoges, France

En 2016 :

1. **Premier Congrès de la Société Mathématique de France**, Tours, France
2. **14th International Conference on p-Adic Functional Analysis**, Aurillac, France
3. Analysis on Fractals and Graphs Workshop, Tsinghua Sanya International Mathematics Forum, Sanya, Chine
4. Analysis on p-adic fields, p-adic Fuglede problem, Institut de Mathématiques de Toulouse, Toulouse, France
5. Journées du GDR Analyse Multifractale, Avignon, France
6. **2016 NCTS Workshop on Dynamical Systems**, Taipei, Taïwan
7. Mathematical Symposium on Modern Analysis and Applications, Institute for Advanced Study in Mathematics, Harbin Institute of Technology, Harbin, Chine

8. Transversal Aspects of Tilings, Oléron, France

J'ai donné également des exposés dans 35 conférences entre 2006 et 2015.

Exposés à des séminaires de mathématiques

Morningside center of Mathematics, Fudan University, South China University of Technology, Wuhan University, Huazhong University of Science and Technology, Shenzhen University, Sun Yat-sen University, Chongqing University (**Chine**) ; Lund University, Växjö University, Institut Mittag-Leffler (**Suède**) ; Korea institute for advanced study, Pohang University of Science and Technology, Dongguk University, Inha University (**Corée du Sud**) ; University of Bristol (**Royaume-Uni**) ; National Center for Theoretical Sciences, Chinese Culture University, Academia Sinica (**Taïwan**) ; Polish Academy of Sciences (**Pologne**) ; The Chinese University of Hong Kong (**Hong Kong**) ; International Islamic University Malaysia (**Malaisie**) ; Universités d'Amiens, de Brest, de Marseille, de Mulhouse, de Nancy, de Nice, d'Orléans, de Rouen, de Tours, Paris 11, Paris 12, Paris 13 ; Institut de Mathématiques de Luminy, Institut Henri Poincaré.

7. Activités de diffusion et vulgarisation des mathématiques

• Correspondant local de l'association AuDiMath.

• Animateur pour de l'Atelier MATh.en.JEANS :
— Collège Watteau, Nogent-sur-Marne (13/14)
— Collège Louis Issaurat, Créteil (11/12, 12/13, 13/14, 15/16, 16/17)
— Collège Victor Duruy, Fontenay-sous-Bois (11/12, 12/13, 13/14, 14/15, 15/16, 16/17, 17/18, 18/19)
— Collège de Lattre de Tassigny, Le Perreux-Sur-Marne (18/19, 19/20)

8. Activités d'enseignement

Comme Maître de Conférences à l'Université Paris-Est Créteil, j'enseigne principalement les cours suivants.

• Cours **Analyse multifractale**, (M2 Mathématiques) (années universitaires 17/18, 18/19, 19/20)
Charge horaire : 18h
Programme : Définition et calcul de l'exposant de Hölder d'une fonction et d'une mesure ; Fonction de Takagi ; Fonction de Lévy ; Analyse multifractale de la fonction de Lévy ; Analyse multifractale de la mesure de Bernoulli sur l'ensemble de Cantor triadique ; Ondelettes et régularité ; Formalisme multifractal.

• Cours/TD **Probabilités**, (M2 Mathématiques enseignement) (11/12, 12/13)
Charge horaire : 36h
Programme : Notions de probabilités ; Inégalité de Paley-Zygmund ; Lemme de Borel-Cantelli version générale ; Fonctions génératrices ; Transformée de Laplace ; Lois usuelles ; Inégalités de Chernov et grandes déviations ; Inégalité de Kolmogorov ; Convergences ; Théorèmes limits.

• Cours **Analyse complexe et de Fourier**, (M1 Mathématiques) (21/22)
Charge horaire : 24h
Programme : Fonction holomorphe ; Conditions de Cauchy-Riemann ; Séries entières ; Prolongement analytique ; Intégration sur un chemin ; Formule de Cauchy ; Théorème de Goursat ; Classification des singularités ; Séries de Laurent ; Théorème des résidus ; Théorèmes de Paley-Wiener.
• Cours **Probabilités**, (M1 Mathématiques) (11/12, 12/13, 13/14, 14/15)
Charge horaire : 36h
Programme : Notions de probabilités ; Indépendance ; Vecteurs aléatoires gaussiens ; Convergences ; Espérance conditionnelle ; Martingale ; Temps d'arrêt.

• TD **Probabilités**, (M1 Mathématiques) (20/21)
Charge horaire : 36h
Programme : Notions de probabilités ; Indépendance ; Vecteurs aléatoires gaussiens ; Convergences ; Espérance conditionnelle.
• TD **Ondelettes**, (M1 Mathématiques) (11/12, 14/15, 15/16, 16/17, 17/18, 18/19, 19/20)
Charge horaire : 36h
Programme : séries de Fourier et la transformation de Fourier ; les liens entre régularité et décroissance des coefficients ; les espaces de Sobolev H^s lorsque s est réel ; la résolution de l'équation des ondes et de la chaleur linéaires ; introduction des bases d'ondelettes ; construction de ces bases par analyse multirésolution (en dimensions 1 et 2), ondelette de Haar ; décompositions en ondelettes ; caractérisation de la régularité Holderienne uniforme par ondelettes ; applications d'ondelettes.

• TD **Fonctions holomorphes**, (M1 Mathématiques) (10/11, 11/12, 12/13)
Charge horaire : 36h
Programme : Propriétés élémentaires des séries entières ; Propriétés élémentaires des fonctions holomorphes ; Équations de Cauchy-Riemann ; Prolongement analytique, Poles, Singularités ; Fonctions analytiques et holomorphes, Intégration sur des chemins ; Fonctions méromorphes, Séries de Laurent, Théorèmes des résidus ; Résidus et Formules remarquables.

• TD **Processus et finance**, (M1 Mathématiques) (10/11, 11/12)
Charge horaire : 36h
Programme : modèle de Black-Sholes ; options européennes et américaines ; théorie des Martingales ; chaînes de Markov en temps discret.

• TD **Structures Algébriques**, (L3 Maths, L3 Math-Phys, L2 Math-Info) (16/17, 17/18, 18/19)
Charge horaire : 36h
Programme : - Groupes et sous-groupes. Morphismes de groupes. Sous-groupes distingués et groupes quotients - Groupes cycliques et monogènes - Groupe symétrique : décomposition en cycles, signature - Groupes classiques et applications à la géométrie - Anneaux. Idéaux. Anneaux quotients : anneau Z/nZ, théorème chinois. Corps finis - Anneaux euclidiens et principaux : éléments irréductibles, factorisation, ppcm et pgcd, identité de Bézout - Anneau des entiers de Gauss - Polynômes à une indéterminée. Fractions rationnelles
• TD **Probabilités**, (L3 Mathématiques) (09/10, 12/13, 16/17).
Charge horaire : 36h
Programme : Tribu. Espace de probabilités. Variables aléatoires discrètes. Variable aléatoire à densité. Vecteurs aléatoires. Lois usuelles. Fonction de répartition. Calcule du moment. Inégalité de Markov. Probabilité conditionnelle. Indépendance. Lemme de Borel-Cantelli. Formule de probabilité totale. Formule de Bayes. Convergence p.s. L^1, en probabilité. Convergence en loi. Loi faible des grands nombres. Loi forte des grands nombres. Théorème central limite.

• TD **Algèbre III**, (L2 Mathématiques) (15/16, 16/17, 17/18, 19/20, 20/21)
Charge horaire : 36h
Programme : - Réduction des endomorphismes et des matrices : valeurs et vecteurs propres, sous-espaces propres, polynôme caractéristique, théorème de Cayley-Hamilton, polynôme minimal, diagonalisation et trigonalisation, décomposition de Dunford - Formes bilinéaires et quadratiques, structure euclidienne, groupe orthogonal - Réduction des matrices symétriques - Exponentielles de matrices et équations différentielles linéaires à coefficients constants

• TD **Réduction des endormorphismes**, (L2 Mathématiques) (20/21)
Charge horaire : 30h
Programme : valeurs et vecteurs propres, sous-espaces propres, polynôme caractéristique, théorème de Cayley-Hamilton, polynôme minimal, diagonalisation et trigonalisation, décomposition de Dunford

• TD **Analyse III**, (L2 Mathématiques) (18/19)
Charge horaire : 36h

Programme : - Topologie de $\mathbb{R}^n$ et des espaces métriques : normes, ouverts, suites, compacité, complétude - Fonctions de plusieurs variables : continuité, dérivées partielles, dérivées directionnelles, différentielle, différentielle seconde, théorème de Schwarz, hessienne, Taylor d'ordre 2, extréma libres et points critiques, intégrales multiples. - Applications : convexité, difféomorphismes, edp simples, régression des moindres carrés, intégrales à paramètres...

Je suis également

- **responsable** du

• Cours Maths en Ingénierie 1 , (L3 Maintenance, Mécanique, Électronique, Physique, Alternance) (2012-2020)
Il s'agit d'un amphi de 80 étudiants. Le contenu du cours est probabilité sur un espace fini et combinatoire ; espaces de probabilités, variable aléatoire, indépendance ; lois de variables aléatoires, espérance, variance, fonction de répartition, et fonction caractéristique ; onvergences, loi des grands nombres, théorème central limite.

- **responsable** du

• Cours Fonctions complexes et transformations linéaires, (L3 Maintenance, Mécanique, Électronique, Physique, Alternance) (2013/14 et 2014/15)
Il s'agit d'un amphi de 80 étudiants. Le contenu du cours est espace vectoriels ; norme ; fonction de la variable complexe ; transformation de Laplace ; transformation de Fourier ; séries de Taylor et séries de Laurant ; théorème des résidus ; théorème de Dirichlet ; égalité de Parseval ; intégrales de Fresnel ; application aux équations.

- **responsable** du

• Cours Fonctions de variable complexe et transformées, (L2 Sciences de l'ingénieur) (20/21, 21/22)
Il s'agit d'un amphi de 80 étudiants. Le contenu du cours est : nombres complexes et fonctions de variable complexe ; fonctions holomorphes ; séries entières et de Laurent ; théorie de Cauchy ; transformée de Laplace et application à la résolution d'équations différentielles avec conditions initiales ; transformée de Fourier et application au équations différentielles.

- **responsable** du

• Cours Calcul matriciel, (L1 Informatique, Physique) (20/21, 21/22)
Il s'agit d'un amphi de 150 étudiants. Le contenu du cours est : systèmes linéaires ; méthode du pivot de Gauss ; matrices ; déterminant ; inverse des matrices ; sous-espaces vectoriels ; familles libres et génératrices ; base ; dimension ; produits scalaires et vectoriels ; systèmes de coordonnées ; courbes paramétrées ; champs de vecteurs ; opérateurs différentiels linéaires.

- **responsable** du

• Cours/TD Outils Maths/Physique 1, (L1 CB/SVT) (2016-2019)
• Cours/TD Outils Maths/Physique 2, (L1 CB/SVT) (2017-2019)
Il s'agit d'un amphi de 300 étudiants. Les contenus sont sur dérivés, intégrations, et équations différentielles.

J'ai assuré aussi

• TD Fonctions complexes et transformations linéaires, (L3 Maintenance, Mécanique, Électronique, Physique, Alternance) (09/10, 10/11, 12/13)
• Cours/TD Probabilités, (L2 Sciences économiques) (12/13)
• TD Analyse dans R^n et Statistiques, (L2 Chimie) (09/10, 10/11)
• TD Calcul matriciel, (L1 Informatique, Physique) (20/21, 21/22)

En tant qu'ATER à l'Université François Rabelais de Tours 2008-2009, j'ai enseigné

• TD Outils Mathématiques, (L1 Science du Vivant et Science de la Terre)
• TD Probabilités, (L1 Science du Vivant)
• TD Statistiques, (L2 Science du Vivant)
• TD Courbes paramétrées, (L2 Mathématiques)

9. Liste de publications

• Prépublications :

[**40**] Julia sets and geometrically finite maps on a finite extension of the p-adic field (avec Shi-Lei Fan, Hongming Nie, and Yue-Fei Wang), soumise, https://arxiv.org/abs/2111.01579

[**39**] Stationary determinantal processes : ψ-mixing property and L^q-dimensions, (avec Shi-Lei Fan, Yanqi Qiu), soumise, https://arxiv.org/abs/1911.04718.

• Publications dans des revues à comité de lecture :

[**38**] Uniform random covering problem, (avec Henna Koivusalo and Tomas Persson), acceptée par **International Mathematics Research Notices**, https://arxiv.org/abs/2103.01595.

[**37**] Odd-odd continued fraction algorithm, (avec Dong Han Kim, Seul Bee Lee), acceptée par **Monatsh. Math.**, https://arxiv.org/abs/2002.06310.

[**36**] Big Birkhoff sums in d-decaying Gauss like iterated function systems, (avec Michał Rams), acceptée par **Studia Mathematica**, https://arxiv.org/abs/1905.02547.

[**35**] *Normal sequences with given limits of multiple ergodic averages*, **Publicacions Matemàtique**, 65(1), (2021), 271 - 290, (avec Michał Rams).
Téléchargeable aussi sur : https://arxiv.org/abs/1904.12143.

[**34**] *p-adic boundary laws and Markov chains on trees*, **Letters in Mathematical Physics**, 110(10), (2020), 2725-2741, (avec Arnaud Le Ny, Utkir Rozikov). Téléchargeable aussi sur : https://arxiv.org/abs/1907.02854.

[**33**] *Hausdorff dimension of weighted singular vectors in* $\mathbb{R}^2$, **Journal of the European Mathematical Society**, 22 (2020), 833-875, (avec Ronggang Shi, Omri Solan et Nattalie Tamam).
Téléchargeable aussi sur : https://arxiv.org/abs/1605.01287.

[**32**] *Fugelede's Conjecture holds in* $\mathbb{Q}_p$, **Math. Ann.**, 375 (2019), 315-341, (avec Ai-Hua Fan, Shi-Lei Fan et Ruxi Shi). Téléchargeable aussi sur : https://arxiv.org/abs/1512.08904.

[**31**] *On the shortest distance between orbits and the longest common substring problem*, **Advances in Mathematics**, 344, (2019), 311-339, (avec Vanessa Barros, Jérôme Rousseau).
Téléchargeable aussi sur :https://arxiv.org/abs/1808.00078.

[**30**] *Metrical results on the distribution of fractional parts of powers of real numbers*, **Proceedings of Edinburgh Mathematical Society**, 62 (2019), 505-521, (avec Yann Bugeaud et Michał Rams). Téléchargeable aussi sur : https://arxiv.org/abs/1710.03596.

[**29**] *p-adic rational dynamical systems*, **SCIENTIA SINICA Mathematica**, in Chinese, 49 (2019), 1513-1534, (avec Ai-Hua Fan, Shi-Lei Fan and Yue-Fei Wang).

[**28**] *Dirichlet uniformly well-approximated numbers*, **International Mathematics Research Notices**, 24 (2019), 7691-7732, (avec Dong Han Kim).
Téléchargeable aussi sur : http://arxiv.org/abs/1508.00520.

[**27**] *Rational map ax+1/x on the projective line over* $\mathbb{Q}_2$, **Science China Mathematics**, 61 (2018), 2221-2236, (avec Shi-Lei Fan). Téléchargeable aussi sur : https://arxiv.org/abs/1706.01227.

[**26**] *Multifractal analysis of some multiple ergodic averages in linear Cookie-Cutter dynamical systems*, **Mathematische Zeitschrift**, 290 (2018), 63–81, (avec Ai-Hua Fan et Meng Wu).
Téléchargeable aussi sur : http://arxiv.org/abs/1208.1755.

[25] *Multifractal analysis of the Birkhoff sums of Saint-Petersburg potential*, **Fractals**, 26, No. 3 (2018) 1850026 (13 pages), (avec Dong Han Kim, MichałRams et Bao-Wei Wang). Téléchargeable aussi sur : https://arxiv.org/abs/1707.06059.

[24] *Periodic p-adic Gibbs measures of q-states Potts model on Cayley tree: The chaos implies the vastness of p-adic Gibbs measures*, **Journal of Statistical Physics**, 171(2018),1000-1034, (avec Mohd Ali Khameini Ahmad et Mansoor Saburov). Téléchargeable aussi sur : https://arxiv.org/abs/1708.02152.

[23] *Rational map ax+1/x on the projective line over* $\mathbb{Q}_p$, **Contemporary Mathematics** : Proccedings of 14th International Conference on P-adic Functional Analysis, 704(2018), 217-230, (avec Shilei Fan). Téléchargeable aussi sur : https://arxiv.org/abs/1612.01881.

[22] *Minimality of p-adic rational maps with good reduction*, **Discrete Contin. Dyn. Syst. -A**, 37 (2017), 3161–3182, (avec Shilei Fan). Téléchargeable aussi sur : https://arxiv.org/abs/1511.04856.

[21] *Dynamics of Chebyshev polynomials on* $\mathbb{Z}_2$, **J. Number Theor.**, 169 (2016), 174–182, (avec Shilei Fan). Téléchargeable aussi sur : https://arxiv.org/abs/1511.03529.

[20] *Upper and lower fast Khintchine spectra in continued fractions*, **Monatsh. Math.**, 180 (2016), 65–81, (avec Michał Rams). Téléchargeable aussi sur : http://arxiv.org/abs/1406.1148.

[19] *Subexponentially increasing sums of partial quotients in continued fraction expansions*, **Math. Proc. Camb. Phil. Soc.**, 160 (2016), 401–412, (avec Michał Rams). Téléchargeable aussi sur : http://arxiv.org/abs/1405.4747.

[18] *Uniform Diophantine approximation related to b-ary and β-expansions*, **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, 36, no. 1, (2016), 1–22., (avec Yann Bugeaud). Téléchargeable aussi sur : http://arxiv.org/abs/1404.1889.

[17] *Dynamics of the square mapping on the ring of p-adic integers*, **Proceedings of the AMS**, 144 no. 3 (2016),1183–1196, (avec Shi-Lei Fan). Téléchargeable aussi sur : http://arxiv.org/abs/1408.4574.

[16] *Dynamics of convergent power series on the integral ring of a finite extension of* $\mathbb{Q}_p$, **Journal of Differential Equations**, 259 (2015)1628–1648, (avec Shi-Lei Fan). Téléchargeable aussi sur : http://arxiv.org/abs/1401.1062

[15] *Multifractal analysis for expanding interval maps with infinitely many branches*, **Transactions of American Mathematical Society**, 367 (2015), 1847-1870, (avec Ai-Hua Fan, Thomas Jordan, et MichałRams). Téléchargeable aussi sur : http://arxiv.org/abs/1110.2856.

[14] *On minimal decomposition of p-adic homographic dynamical systems*, **Advances in Mathematics**, 257, (2014), 92-135, (avec Ai-Hua Fan, Shi-Lei Fan and Yue-Fei Wang). Téléchargeable aussi sur : http://arxiv.org/abs/1305.0762.

[13] *On the fast Khintchine spectrum in continued fractions*, **Monatsh. Math.**, 171 (2013), 329-340, (avec Ai-Hua Fan, Bao-Wei Wang et Jun Wu). Téléchargeable aussi sur : http://arxiv.org/abs/1208.1825.

[12] *Multifractal analysis of some multiple ergodic averages for the systems with non-constant Lyapunov exponents*, **Real Analysis Exchange**, 39, no. 1, (2013), 1-14, (avec Michał Rams). Téléchargeable aussi sur : http://arxiv.org/abs/1206.1397.

[11] *Inhomogeneous Diophantine approximation with general error functions*, **Acta Arith.** 160 (2013), 25-35, (avec MichałRams) Téléchargeable aussi sur : http://arxiv.org/abs/1208.1826.

[10] *Diophantine approximation by orbits of expanding Markov maps*, **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, 33, no. 2, (2013), 585-608, (avec Stéphane Seuret). Téléchargeable aussi sur : http://arxiv.org/abs/1111.1081.

[9] *Level sets of multiple ergodic averages*, **Monatsh. Math.**, 168, no. 1, (2012), 17-26, (avec Ai-Hua Fan et Ji-Hua Ma). Téléchargeable aussi sur : http://arxiv.org/abs/1105.3032v1.

[8] *Dynamical properties of negative beta transformation*, **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, 32, no. 5, (2012), 1673-1690, (avec Wolfgang Steiner)
Téléchargeable aussi sur : http://arxiv.org/abs/1101.2366

[7] *On minimal decomposition of p-adic polynomial dynamical systems*, **Advances in Mathematics**, 228, no. 4, (2011), 2116-2144, (avec Ai-Hua Fan). Téléchargeable aussi sur : http://arxiv.org/abs/1010.5583v2.

[6] *Dimension of Besicovitch-Eggleston sets in the countable symbolic space*, **Nonlinearity**, 23 (2010) 1185-1197, (avec Ai-Hua Fan, Ji-Hua Ma et Bao-Wei Wang)

[5] *On the frequency of partial quotients of regular continued fractions*, **Math. Proc. Camb. Phil. Soc.**, 148 (2010), 179-192, (avec Ai-Hua Fan et Ji-Hua Ma).

[4] *On Khintchine exponents and Lyapunov exponents of continued fractions*, **Ergodic Theory and Dynam. Systems**, 29 (2009), 73-109, (avec Ai-Hua Fan, Bao-Wei Wang et Jun Wu). Téléchargeable aussi sur : http://arxiv.org/abs/0802.3433v2.

[3] *Dimension of some non-normal continued fraction sets*, **Math. Proc. Camb. Phil. Soc.**, 145 (2008), no. 1, 215-225, (avec Ji-Hua Ma et Bao-Wei Wang).

[2] *Generic points in systems of specification and Banach valued Birkhoff ergodic average*, **Discrete Contin. Dyn. Syst.**, 21 (2008) 1103-1128, (avec Ai-Hua Fan et Jacques Peyrière).

[1] *p-adic repellers in $\mathbb{Q}_p$ are subshifts of finite type*, **C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I**, 344 (2007) 219-224, (avec Ai-Hua Fan, Yue-Fei Wang et Dan Zhou).

10. Présentation des activités de recherche

Je m'intéresse à l'analyse multifractale, aux systèmes dynamiques, et à l'approximation diophantienne. La plupart des objets de mes recherches sont issus de la théorie des nombres. Mes travaux de recherche se divisent en trois parties. La première partie concerne la dimension de Hausdorff des ensembles issus des systèmes dynamiques et de l'approximation diophantienne. La deuxième partie porte sur les propriétés dynamiques de certains systèmes dynamiques arithmétiques. La dernière partie est dédiée à la conjecture de Fuglede dans le corps des nombres p-adiques. Ces travaux ont fait l'objet de 35 publications.

La première partie de mes recherches qui comprend les articles [2-6, 9-13, 15, 18-20, 25-26, 28, 30, 33, 35], est consacrée à l'analyse multifractale des moyennes ergodiques de Birkhoff simples et multiples des systèmes dynamiques (les systèmes dynamiques symboliques et le système de Gauss liée aux fractions continues) et à l'approximation diophantienne métrique.

Chaque nombre $x \in [0,1]$ s'écrit en base 2 :

$$x = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \cdots + \frac{x_k}{2^k} + \cdots ,$$

avec les digits $x_k = x_1(T^{k-1}x) \in \{0,1\}$, où x_1 est la fonction du premier digit $x \mapsto x_1$ et $T : [0,1] \to [0,1]$ est le système "doubling map" défini par $x \mapsto 2x \bmod 1$. En 1909, Borel a montré que presque sûrement, la fréquence du digit 1 est 1/2. C'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=0}^{n-1} x_1(T^j x)}{n} = \frac{1}{2}.$$

Néanmoins, il y en a aussi beaucoup de nombres "non-typique". Par exemple, les nombres qui ont la fréquence du digit 1 égale à $p \in [0,1]$ avec $p \neq 1/2$. Alors, une question naturelle est qu'il y en a combien de ces nombres "non-typique" ? En 1934, Besicovitch, et en 1949, Eggleston (pour des cas en base b un entier supérieur à 2) ont répondu cette question. Ils ont montré qu'il y en a un nombre non-dénombrable de ces nombres et la dimension de Hausdorff de l'ensemble des nombres ayant la fréquence du digit 1 égale à p est

$$\frac{-p\log p - (1-p)\log(1-p)}{\log 2}.$$

Ceci est la première analyse multifractale des systèmes dynamiques (pour le système $x \mapsto 2x \bmod 1$).

En général, soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique ergodique, où $\mathcal{B}$ est une tribu sur l'espace X, T est une transformation mesurable et invariante ergodique par rapport à la mesure μ. En 1931, Birkhoff a montré que pour un tel système dynamique, pour toute fonction $\varphi : X \to \mathbb{R}$ intégrable, les moyennes

$$A_n(\varphi, x) := \frac{\varphi(x) + \varphi(Tx) + \cdots + \varphi(T^{n-1}x)}{n}$$

convergent vers $\int_X \varphi(x)d\mu(x)$ pour μ-presque tout $x \in X$. Les points non μ-typiques qui ont des propriétés différentes pour leurs moyennes ergodiques ne sont pas concernés par le Théorème de Birkhoff. Ces points, comme les nombres "non-typiques" de Besicovitch–Eggleston, sont objets d'étude de l'analyse multifractale. Supposons que X est un espace métrique. Le but de l'analyse multifractale des moyennes ergodiques de Birkhoff est de calculer les dimensions de Hausdorff des ensembles de niveau :

$$\left\{x \in X : \lim_{n\to\infty} A_n(\varphi, x) = \alpha\right\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

La fonction de dimension de Hausdorff associée au niveau α est dite un spectre multifractal. La fonction φ est appelée souvent un potentiel.

L'exemple de Besicovitch–Eggleston, est donc, l'analyse multifractale des moyennes ergodiques de Birkhoff d'une fonction d'indicateur pour le système $Tx = 2x \bmod 1$ sur $[0,1]$. Le travail de Besicovitch a été largement généralisé par Eggleston et beaucoup d'autres, pour les systèmes dynamiques symboliques finis et les transformations d'intervalle avec un nombre fini de branches.

Parmi ces généralisations, en collaboration avec Ai-Hua Fan et Jacques Peyrière, dans [2], nous prouvons que pour un système dynamique compact ayant la propriété de spécification, l'entropie topologique de l'ensemble des points génériques d'une mesure invariante est égale à l'entropie de la mesure. En corollaire, nous établissons un principe variationnel pour le spectre d'entropie topologique des moyennes de Birkhoff à valeurs dans un espace de Banach. Nous remarquons ici que l'entropie topologique est l'entropie de Bowen définie en analogue de la dimension de Hausdorff. Donc le spectre d'entropie est aussi un spectre multifractal.

Les résultats précédents concernent des systèmes dynamiques à nombre fini de symboles. Les résultats correspondants pour les systèmes dynamiques symboliques infinis et les transformations d'intervalle avec un nombre infini de branches, comme le système dynamique de Gauss associé aux fractions continues, sont assez peu nombreux. Par exemple, pendant longtemps, on ne connaissait pas exactement la dimension de Hausdorff de l'ensemble de nombres ayant la fréquence du digit k, dans leur développement en fraction continue, égale à p_k, pour $k \geq 1$. En 1975, Billingsley et Henningsen ont donné une borne supérieure de la dimension de Hausdorff de cet ensemble. Avec A. Fan et J. Ma, dans [5], nous avons répondu complètement la question et nous avons montré que la formule exacte de la dimension de Hausdorff est

$$\max\left\{\frac{1}{2},\ \sup\left\{\frac{h_\mu}{2\int|\log x|d\mu} : \mu \text{ est ergodique}, \mu\big([\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]\big) = p_k\right\}\right\},$$

où h_μ est l'entropie de la mesure de μ.

L'analyse multifractale du potentiel $\log|T'|$ (T étant le système dynamique de Gauss), dont les moyennes ergodiques de Birkhoff sont des exposants de Lyapunov, a été partiellement réalisée par Pollicott et Weiss. En collaboration avec A. Fan, B. Wang et J. Wu, dans [4], nous avons complété cette analyse multifractale. Nous trouvons en s'appuyant sur la théorie de l'opérateur de Ruelle, les spectres multifractaux complets de l'exposant de Khintchine (concernant le potentiel $\log[1/x]$) et de l'exposant de Lyapunov, qui ne sont ni concaves ni convexes. Un résultat similaire pour le shift sur un espace symbolique d'un alphabet infini a aussi obtenu dans mon travail [6] en collaboration avec A. Fan, J. Ma et B. Wang. D'ailleurs, avec J. Ma et B. Wang, nous avons également étudié les fractions continues extrêmement non-normales dans [3]. Ce résultat qui réfute une conjecture d'Olsen porte sur la dimension de Hausdorff de l'ensemble de points dont les moyennes de Birkhoff oscillent de façon extrême.

En collaboration avec A. Fan, T. Jordan et M. Rams, dans [15], nous avons aussi largement généralisé les résultats de [4] et [5] aux potentiels continus par morceaux à valeurs dans $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ pour une transformation d'intervalle ayant un nombre dénombrable de branches. Considérons (Λ, T) un système dynamique d'intervalle ayant un nombre dénombrable de branches, avec Λ son attracteur. Soit $\phi_i : \Lambda \to \mathbb{R}$ $(i \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions bornées ayant les variations uniformément tendent vers 0 (voir [15] pour les détails). Posons

$$\Lambda_{\underline{\gamma}} = \{x \in \Lambda : \lim_{n\to\infty} A_n(\phi_i, x) = \gamma_i \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}\}, \quad \underline{\gamma} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}.$$

Soit $\mathcal{M}(T)$ l'ensemble de mesure invariante sur Λ. Pour $\mu \in \mathcal{M}(T)$, notons h_μ et λ_μ son entropie et son exposant de Lyapunov. Posons

$$Z_0 = \left\{\underline{\gamma} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} : \exists \mu \in \mathcal{M}(T), \forall i \in \mathbb{N}, \int \phi_i \mathrm{d}\mu = \gamma_i\right\}, \text{ et } s_\infty = \inf\Big\{s \geq 0 : \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}(I_i)^s < \infty\Big\},$$

où I_i est la suite des sous-intervalles dans la définition de (Λ, T).

Dans [15], nous obtenons le théorème suivant.

Theorem 10.1. *Si toutes les fonctions ϕ_i sont bornées, alors*

$$\dim \Lambda_{\underline{\gamma}} = \max\left\{s_\infty,\ \sup_{\mu\in\mathcal{M}(T)} \left\{\frac{h_\mu}{\lambda_\mu} : \int \phi_i\, d\mu = \gamma_i\ \forall i \in \mathbb{N},\ h_\mu < \infty\right\}\right\}.$$

Pour le système dynamique de Gauss T, la somme de Birkhoff $S_n(\varphi, x) := \varphi(x) + \varphi(Tx) + \cdots + \varphi(T^{n-1}x)$ d'un potentiel φ peut aller à l'infini très vite. Nous nous intéressons également aux points dont le taux de croissance de leurs sommes de Birkhoff est prescrit. Plus précisément, étant donnée une fonction croissante $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \Phi(n)/n = \infty$, nous nous intéressons à la dimension de Hausdorff de

$$\left\{ x : \lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\varphi, x)}{\Phi(n)} = 1 \right\}. \tag{1}$$

Avec M. Rams, dans [19], nous montrons que la dimension de Hausdorff de cet ensemble pour le potentiel $\varphi = a_1 : x \mapsto \lfloor 1/x \rfloor$ (le premier quotient partiel de la fraction continue de $x \in [0,1]$), et pour $\Phi(n) = \exp\{n^\gamma\}(\gamma \in [1/2, 1))$ est toujours $1/2$, ce qui complète les travaux de Wu–Xu, et Xu. L'analyse multifractale de la somme de Birkhoff du potentiel $\varphi = \log a_1$ a été faite dans [13] en collaboration avec A. Fan, B. Wang et J. Wu. De plus, dans [20], avec M. Rams, nous remplaçons la limite dans (1) par liminf et limsup et obtenons les dimensions de Hausdorff correspondantes. En général, ces dimensions sont différentes, ce qui montre un nouveau phénomène dans le système dynamique de Gauss.

Soient X un espace métrique et T une transformation sur X. Soient $f_1, \cdots, f_\ell$ ($\ell \geq 2$), ℓ fonctions bornées définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les moyennes ergodiques multiples

$$M_n(f_1, f_2, \cdots, f_\ell, x) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f_1(T^k x) f_2(T^{2k} x) \cdots f_\ell(T^{\ell k} x)$$

ont été bien étudiées par Furstenberg, Conze–Lesigne, Bourgain, Host–Kra, Bergelson–Host–Kra, Tao et al. Nous étudions ces moyennes ergodiques multiples du point de vue d'analyse multifractale. Nous nous intéressons aux dimensions de Hausdorff des ensembles de niveau :

$$\left\{ x \in X : \lim_{n\to\infty} M_n(f_1, f_2, \cdots, f_\ell, x) = \alpha \right\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Comme un premier example, avec A. Fan et J. Ma, dans [9], nous obtenons la dimension de Hausdorff de l'ensemble dans (2) pour le décalage sur $\{+1, -1\}^{\mathbb{N}}$ et pour $f_1 = \cdots = f_\ell : x = (x_0, x_1, \dots) \mapsto x_0$. Dans [9], nous avons aussi montré une formule de dimension de Minkowski :

$$\dim_M \left\{ x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} : x_k x_{2k} = 0 \ \forall k \geq 1 \right\} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\log_2 F_j}{2^{j+1}},$$

avec $F_0 = 1, F_1 = 2$ et $F_j = F_{j-1} + F_{j-2}$ étant la suite de Fibonacci.

Nos résultats, en particulier, la question de la dimension de Hausdorff pour l'ensemble ci-dessus ont attiré l'intérêt de Kenyon–Peres–Solomyak, qui ont finalement trouvé la formule de la dimension de Hausdorff (différente de celle de la dimension de Minkowski). Plus tard, beaucoup de résultats sont obtenus. On peut citer Kenyon–Peres–Solomyak, Peres–Solomyak, Fan–Schmeling–Wu, Peres–Schmeling–Seuret–Solomyak et al.

Avec M. Rams, dans [12], nous obtenons la formule de dimension de Hausdorff pour une application dilatante et affine par morceaux de l'intervalle, pour $\ell = 2$ et pour $f_1 = f_2$ une fonction d'indicateur. Le résultat de [12] est généralisé aux systèmes dynamiques cookie-cutter linéaires dans [26], un travail en commun avec A. Fan et M. Wu. En effet, pour une fonction φ localement constante, nous pouvons exprimer la dimension de Hausdorff de

$$L_\varphi(\alpha) := \left\{ x : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum \varphi(T^k x, T^{kq} x, \cdots, T^{kq^{\ell-1}} x) = \alpha \right\}$$

comme solution d'un système d'équations impliquant la pressure associée au potentiel φ qui est le logarithme de la valeur propre d'un opérateur non-linéaire de Ruelle. Dans le cas $q = \ell = 2$, posons $(s, r) \mapsto P(s, r)$ la pression associée à φ (voir [26] pour les détails). Soient A, B les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble

$$\left\{ a \in \mathbb{R} : \ \exists (s, r) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \frac{\partial P}{\partial s}(s, r) = a \right\}.$$

Theorem 10.2. *Nous avons*

(i). $L_\varphi(\alpha) \neq \emptyset$ *si et seulement si* $\alpha \in [A, B]$.

(ii). Pour tout $\alpha \in (A, B)$, there exists a unique solution $(s(\alpha), r(\alpha)) \in \mathbb{R}^2$ to the system

$$\begin{cases} P(s,r) & = \alpha s \\ \frac{\partial P}{\partial s}(s,r) & = \alpha. \end{cases}$$

De plus, $s(\alpha)$ and $r(\alpha)$ est des functions analytique-réelles de $\alpha \in (A, B)$.

(iii). Les limites ci-dessous existent :

$$r(A) := \lim_{\alpha \downarrow A} r(\alpha), \quad r(B) := \lim_{\alpha \uparrow B} r(\alpha).$$

(iv). Pour tout $\alpha \in [A, B]$, nous avons

$$\dim_H L_\varphi(\alpha) = r(\alpha).$$

On pourra aussi étudier les moyennes ergodiques simples et multiples en même temps. Il s'agit de calculer la dimension de Hausdorff d'une intersection d'un ensemble de niveau de moyennes ergodiques simples et d'un ensemble de niveau de moyennes ergodiques multiples. Comme un premier essai de recherche dans cette direction, avec M. Rams, nous avons obtenu la dimension de Hausdorff de l'ensemble des suites normales ayant une limite donnée des moyennes ergodiques multiples. Précisément, soit $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Une suite $\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est appelée normale si pour tout $n \in \mathbb{N}$, chaque mot dans $\{0,1\}^n$ a la fréquence $1/2^n$. Notons $\mathcal{N}$ l'ensemble des suites normales. Posons

$$A_\alpha := \left\{ (\omega_k)_1^\infty \in \Sigma : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \omega_k \omega_{2k} = \alpha \right\} \qquad (\alpha \in [0,1]).$$

Nous avons montré dans [35] le théorème suivant.

Theorem 10.3. *Si $\alpha \leq 1/2$,*

$$\dim_H(\mathcal{N} \cap A_\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} H(2\alpha),$$

où $H(t) = -t \log_2 t - (1-t)\log_2(1-t)$; et si $\alpha > 1/2$ l'ensemble $\mathcal{N} \cap A_\alpha$ est vide.

L'approximation diophantienne classique est l'étude de l'approximation d'un nombre réel par des rationnels. En 1842, Dirichlet a démontré son théorème fondamental de l'approximation diophantienne : pour tout nombre réel θ, pour tout réel $Q \geq 1$, il existe un rationnel p/q tel que $1 \leq q \leq Q$ et $|\theta - p/q| < 1/qQ$. Comme corollaire, pour tout nombre réel θ, il existe une infinité de nombres rationnels p/q tels que $|\theta - p/q| < 1/q^2$. En suivant Waldschmidt, on appelle la propriété d'approximation dans le théorème de Dirichlet l'approximation uniforme et celle dans son corollaire l'approximation asymptotique.

Nous nous intéressons aux tailles des ensembles de nombres qui sont bien approchés, de façon uniforme ou asymptotique, par des rationnels ou par une orbite d'un système dynamique avec une vitesse donnée. Dans la littérature, beaucoup d'attention est accordée dans l'approximation asymptotique. Notons $\|x\|$ la distance de x à l'entier le plus proche. En 1907, Minkowski a prouvé que, pour n'importe quel θ irrationnel, pour tout nombre réel y qui n'est pas égal à $m\theta + \ell$ avec $m, \ell \in \mathbb{N}$, il existe une infinité d'entiers n tels que $\|n\theta - y\| < \frac{1}{4|n|}$. En général, fixons un irrationnel θ. Pour $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante vers zéro, nous mesurons la taille de l'ensemble

$$\mathcal{L}_\Phi[\theta] := \{ y \in \mathbb{R} : \|n\theta - y\| < \Phi(n) \text{ pour une infinité de } n \}.$$

La mesure de Lebesgue de $\mathcal{L}_\Phi[\theta]$ a été largement étudiée par Kurzweil, Cassels, Laurent–Nogueira, Kim, Fuchs–Kim et al.

En collaboration avec M. Rams, dans [11], nous obtenons des estimations optimales pour la dimension de Hausdorff de $\mathcal{L}_\Phi[\theta]$ en utilisant l'exposant d'irrationalité $w(\theta) = \sup\{\beta \geq 1 : \liminf_{n\to\infty} n^\beta \|n\theta\| = 0\} \in [1, \infty]$.

En collaboration avec S. Seuret, nous remplaçons "$n\theta$" dans la définition de $\mathcal{L}_\Phi[\theta]$ par l'orbite $T^n x$ d'un point x sous une application dilatante d'intervalle de Markov finie T sur $[0,1]$. Nous montrons dans [10] que presque sûrement, par rapport à la mesure de Gibbs μ_ϕ associée à un potentiel ϕ, la dimension Hausdorff de

$$\mathcal{L}^\delta(x) := \{y \in [0,1] : \|T^n x - y\| < n^{-\delta} \text{ pour une infinité de } n \in \mathbb{N}\},$$

est déterminée par le spectre multifractal de la mesure μ_ϕ.

Dans la direction de l'approximation uniforme, les résultats connus sont dans des espaces de dimension supérieure sur les vecteurs singuliers. Un vecteur $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ est appelé singulier si pour tout $\epsilon > 0$, il existe Q_0 tel que pour tout $Q > Q_0$ le système des inégalités

$$\max_{1\le i\le d} |qx_i - p_i| < \frac{\epsilon}{Q^{1/d}} \quad \text{et} \quad 0 < q < Q$$

admet une solution entière $(p,q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}$. Lorsque $d = 1$, seuls les nombres rationnels sont singuliers. L'existence de vecteurs singuliers qui ne se trouvent pas dans un sous-espace rationnel a été prouvée par Khintchine pour $d \ge 2$. Davenport et Schmidt ont montré que l'ensemble des vecteurs singuliers est de mesure de Lebesgue zéro. Cependant, le calcul de la dimension Hausdorff des vecteurs singuliers est loin d'être facile. Pour $d = 2$, Cheung a montré que la dimension de Hausdorff de l'emsemble des vecteurs singuliers est $4/3$. Le résultat general $d^2/(d+1)$ pour $d \ge 3$ est obtenu récemment par Cheung et Chevallier.

En collaboration avec D. H. Kim, dans [28], nous obtenons la dimension de Hausdorff de l'ensemble ($\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\tau \ge 1$ sont fixés)

$$\mathcal{U}_\tau[\theta] := \left\{y \in \mathbb{R} : \text{ pout tout grand } Q,\ 1 \le \exists n \le Q \text{ tel que } \|n\theta - y\| < Q^{-\tau}\right\},$$

ce qui répond aussi à une question de Bugeaud et Laurent. Nous avons le théorème suivant.

Theorem 10.4. *Nous avons $\mathcal{U}_\tau[\theta] = \mathbb{T}$ si $\tau < 1/w(\theta)$; $\mathcal{U}_\tau[\theta] = \{i\theta \in \mathbb{T} : i \ge 1, i \in \mathbb{Z}\}$ si $\tau > w(\theta)$; et*

$$\dim_H(\mathcal{U}_\tau[\theta]) = \begin{cases} \displaystyle\varliminf_{k\to\infty} \frac{\log\left(n_k^{1+1/\tau}\prod_{j=1}^{k-1} n_j^{1/\tau}\|n_j\theta\|\right)}{\log(n_k\|n_k\theta\|^{-1})}, & \displaystyle\frac{1}{w(\theta)} < \tau < 1, \\ \displaystyle\varliminf_{k\to\infty} \frac{-\log\left(\prod_{j=1}^{k-1} n_j\|n_j\theta\|^{1/\tau}\right)}{\log(n_k\|n_k\theta\|^{-1})}, & 1 < \tau < w(\theta). \end{cases}$$

où n_k est la sous-suite (maximale) de (q_k) telle que

$$\begin{cases} n_k\|n_k\theta\|^\tau < 1, & \text{si } 1/w(\theta) < \tau < 1, \\ n_k^\tau\|n_k\theta\| < 2, & \text{si } 1 < \tau < w(\theta). \end{cases}$$

Dans [33], en collaboration avec R. Shi, O. Solan et N. Tamam, nous généralisons le résultat de Cheung aux vecteurs singuliers pondérés. Soit $w = (w_1, w_2)$ une paire de nombres réels positifs tels que $w_1 + w_2 = 1$. Nous montrons le théorème suivant.

Theorem 10.5. *L'ensemble de vecteurs w-singulars, c'est-à-dire les vecteurs $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $Q_0 > 1$ tel que pour tout $Q > Q_0$ le système d'inégalités*

$$|qx_1 - p_1| < \varepsilon^{w_1} Q^{-w_1},\ |qx_2 - p_2| < \varepsilon^{w_2} Q^{-w_2},\ \text{et } 0 < q < Q,$$

admet une solution entière $(p,q) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}$, est de dimension de Hausdorff

$$2 - \frac{1}{1 + \max(w_1, w_2)}.$$

Remarquons que (d'après Dani) les vecteurs w-singuliers correspondent à certaines trajectoires divergentes dans l'espace $\mathcal{L}_3$ des réseaux unimodulaires dans $\mathbb{R}^3$ par rapport au semi-groupe à un paramètre $\{a_t = \mathrm{diag}(e^{w_1 t}, e^{w_2 t}, e^{-t}) : t \ge 0\}$.

Dans l'étude de l'approximation uniforme, nous pouvons également remplacer "$n\theta$" par une orbite d'un système dynamique. Soit T_β le β-transformation sur $[0,1]$ définie par $T_\beta x = \beta x \bmod 1$. Dans [18], avec Y. Bugeaud, nous montrons le théorème suivant.

Theorem 10.6. *Nous avons*

$$\dim_H \left\{ x \in [0,1] : \forall N \gg 1, \exists 1 \le n \le N,\ T_\beta^n(x) < (\beta^N)^{-v} \right\} = \left(\frac{1-v}{1+v}\right)^2,$$

et

$$\dim_H \left\{ \beta > 1 : \forall N \gg 1, \exists 1 \le n \le N,\ T_\beta^n(1) < (\beta^N)^{-v} \right\} = \left(\frac{1-v}{1+v}\right)^2.$$

Remarquons que les résultats correspondants sur l'approximation asymptotique ont été obtenus par Shen–Wang et Persson–Schmeling.

Quand "$n\theta$" est remplacé par la suite β^n avec $\beta > 1$, dans [30], en collaboration avec Y. Bugeaud et M. Rams, nous obtenons des résultats similaires que ceux dans [18].

La deuxième partie de mes recherches est consacré à l'étude de récurrence des systèmes dynamiques sur le corps des nombres p-adiques (articles [1, 7, 14, 16-17, 21-24, 27, 29, 34]), de la $(-\beta)$-transformation (article [8]) et des systèmes dynamiques ayant la décroissance rapide de corrélation (article [31]).

Le corps $\mathbb{Q}_p$ a été introduit par Hensel en 1897. Il a été étudié de façon plus approfondie dans le domaine de la théorie des nombres. En 1987, Volovich a appliqué les nombres p-adiques pour construire sa théorie des cordes p-adiques. Le travail de Volovich a suscité l'intérêt pour les modèles p-adiques en physique et a stimulé l'étude de systèmes dynamiques p-adiques. Le premier travail de systèmes dynamiques sur $\mathbb{Q}_p$ est probablement du à Oselies et Zieschang. Puis, on pourra trouver les travaux de Anashin, Coelho–Parry, Gundlach–Khrennikov–Lindahl, Larin, et al. Dans l'autre direction, les dynamiques sur le corps $\mathbb{C}_p$ des nombres p-adiques complexes, et sur l'espace de Berkovich associé à la droite projective de $\mathbb{C}_p$ ont été beaucoup étudiées par Herman–Yoccoz, Hsia, Benedetto, Rivera-Letelier, Favre–Rivera-Letelier et al.

Nous nous intéressons aux systèmes dynamiques sur $\mathbb{Q}_p$. Notons $\mathbb{Z}_p$ the ring of p-adic integers in $\mathbb{Q}_p$. Dans [7], en collaboration avec A. Fan, nous avons montré le théorème suivant.

Theorem 10.7. *Soit $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ polynôme d'ordre supérieur à 2, $\mathbb{Z}_p$ se décompose en trois parties :*

$$\mathbb{Z}_p = \mathcal{P} \sqcup \mathcal{M} \sqcup \mathcal{B},$$

où $\mathcal{P}$ est un ensemble fini et se compose de tous les points périodiques ; $\mathcal{M} = \sqcup_{i\in I}\mathcal{M}_i$ consiste en un nombre fini ou dénombrable de composants minimaux $\mathcal{M}_i$, chaque $\mathcal{M}_i$ étant une union finie de boules ; et $\mathcal{B}$ est attiré dans $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{M}$.

Cette décomposition de l'espace est appelée décomposition minimale.

Même si nous avons un théorème de décomposition minimal général pour les polynômes dans $\mathbb{Z}_p[x]$, il n'est pas facile de trouver la décomposition précise pour un polynôme donné. En collaboration avec S. Fan, dans [17], nous détaillons la décomposition minimale précise pour la fonction carrée sur $\mathbb{Z}_p$, et dans [21] la décomposition minimale pour les polynômes de Chebyshev sur $\mathbb{Z}_2$.

En collaboration avec S. Fan, nous trouvons aussi une telle décomposition minimale pour les séries convergentes sur une extension finie K de $\mathbb{Q}_p$ dans [16]. Il y a un nombre non-dénombrable de sous-systèmes minimaux si $K \neq \mathbb{Q}_p$.

Pour des fonctions rationnelles, en collaboration avec A. Fan, S. Fan et Y. Wang, nous étudions tout d'abord dans [14] les fonctions rationnelles de degré un :

$$\phi(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (a,b,c,d \in \mathbb{Q}_p,\ ad-bc \neq 0).$$

Si ϕ a un (ou deux) points fixes dans $\mathbb{Q}_p$, alors ϕ est conjugué à une translation (ou une multiplication) et la décomposition minimale a déjà été effectuée par Fan et Fares. Notons $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ la droite projective de $\mathbb{Q}_p$. Nous montrons le théorème suivant.

Theorem 10.8. *Si ϕ n'a pas de point fixe dans $\mathbb{Q}_p$ et si $\phi^n \neq id$ pour tous les entiers $n > 0$, alors $(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p), \phi)$ se décompose en un nombre fini de sous-systèmes minimaux et ces sous-systèmes minimaux sont topologiquement conjugués les uns aux autres.*

Puis dans [22], nous étudions les fonctions rationnelles ayant bonne réduction, et trouvons des décompositions minimales de la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$. Des conditions minimales sur tout l'espace $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ sont aussi examinées.

Les résultats que nous obtenons sur la décomposition minimale sont pour des dynamiques 1-lipschitziennes. Il existe aussi beaucoup de polynômes et fonctions rationnelles dilatants. Avec A. Fan, Y. Wang et D. Zhou, dans [1], nous avons montré que pour les systèmes localement dilatants et transitifs, la restriction sur son ensemble de Julia est conjuguée à certains sous-décalages de type fini. fini. En collaboration avec S. Fan, dans [23] et dans [27], nous décrivons les structures dynamiques de la fonction rationnelle $x \mapsto ax + 1/x$, où $a \in \mathbb{Q}_p$, pour $p \geq 3$ et $p = 2$ respectivement. Nous décrivons précisément les ensembles de Julia et de Fatou pour cette fonction rationnelle. Pour les ensembles de Julia, nous trouvons les sous décalages de type fini conjugués.

Les études de systèmes dynamiques sur $\mathbb{Q}_p$ ont des applications à l'étude des mesures de Gibbs p-adiques sur les arbres de Cayley. Dans [24], nous avons étudié l'application de Potts–Bethe d'ordre 3 sur $\mathbb{Q}_p$. Elle est une fonction rationnelle de degré 3. Nous montrons que le sous système sur son ensemble de Julia est topologiquement conjugué au full shift d'un alphabet de trois lettres. Ce dernier résultat implique qu'il y une infinité de mesures de Gibbs p-adiques périodiques pour le modèle de Potts à q-états sur l'arbre de Cayley d'ordre trois.

Plus généralement, avec A. Le Ny et U. Rozikov, dans [34], nous avons étudié des potentiels à q-états sur un arbre infini général avec une interaction p-adique des voisins donnée par une matrice stochastique. Nous avons montré l'unicité de la chaine de Markov (*splitting Gibbs measures*) sous certaines conditions suffisantes de la matrice stochastique. De plus nous avons trouvé une famille des matrices stochastiques pour lesquelles il existe au moins deux chaines de Markov p-adiques sur un arbre de Cayley.

Pour attirer l'intérêt des mathématiciens chinois sur les systèmes dynamiques p-adiques, en collaboration avec A. Fan, S. Fan et Y. Wang, nous avons publié un article en chinois [29]. Dans cet article, nous résumons les recherches récentes sur les dynamiques sur $\mathbb{Q}_p$ des fonctions rationnelles. En particulier, la minimalité et les propriétés chaotiques de ces systèmes dynamiques sont discutées. Nous faisons également une courte introduction sur les systèmes dynamiques sur $\mathbb{C}_p$ et sur la droite projective de Berkovich. Quelques questions ouvertes sont proposées.

Dans le travail [8], avec W. Steiner, nous examinons la $(-\beta)$-transformation définie par

$$T_{-\beta} : \ (0,1] \to (0,1] , \quad x \mapsto -\beta x + \lfloor \beta x \rfloor + 1 .$$

Cette transformation est une modification naturelle de la β-transformation sur laquelle beaucoup de mathématiciens ont eu des contributions : Rényi, Gelfond, Parry, Bertrand-Mattis, Blanchard et al. Différent de la β-transformation, la densité de la mesure invariante absolument continue de la $(-\beta)$-transformation peut être nulle sur certains sous-intervalles de $[0,1]$. En collaboration avec W. Steiner, dans [8], nous décrivons précisément ces sous-intervalles. En supprimant ces sous-intervalles de $[0,1]$, nous prouvons que la $(-\beta)$-transformation est exacte (locally eventually onto) pour tout $\beta > 1$ ce qui confirme une conjecture de Gora. Nous déduisons aussi de notre résultat que toute $(-\beta)$-transformation a une unique mesure d'entropie maximale ce qui complète une étude de Faller.

Soit (X, T, μ) un système dynamique mesuré dont l'espace X est muni d'une distance d. Pour deux points $x, y \in X$ différents, et un entier n positif, définissons $m_n(x,y)$ la plus petite distance entre $T^i x$ et $T^j y$ avec $0 \leq i, j \leq n$:

$$m_n(x,y) = \min_{i,j=0,\dots,n-1} \left(d(T^i x, T^j y) \right) .$$

Nous étudions le comportement asymptotique de $m_n(x,y)$. La dimension de corrélation C_μ de la mesure μ définie par

$$C_\mu = \lim_{r \to 0} \frac{\log \int_X \mu \left(B \left(x, r \right) \right) d\mu(x)}{\log r} \quad \text{si la limite existe.}$$

Dans [31], en collaboration avec V. Barros et J. Rousseau, nous montrons le théorème suivant.

Theorem 10.9. *Si le système dynamique (X, T, μ) a la décroissance de corrélation exponentielle, alors $\mu \times \mu$-presque sûrement*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log m_n(x,y)}{-\log n} = \frac{2}{C_\mu}.$$

Pour les rotations irrationnelles, le comportement est différent. L'exposant d'irrationalité de l'angle de la rotation est impliqué.

La dernière partie de mes recherches contenant le travail [32] an collaboration avec A. Fan, S. Fan et R. Shi, est sur la conjecture de Fuglede dans le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques.

Soit G un groupe abélien localement compact et $\Omega \subset G$ un borélien de mesure de Haar positive et finie. On appelle Ω un ensemble spectral s'il existe un ensemble Λ de caractères continues de G qui forment une base d'Hilbert de $L^2(\Omega)$. On dit que Ω pave G par translation s'il existe un ensemble de translatées $T \subset G$ tel que $\sum_{t\in T} 1_\Omega(x-t) = 1$ presque partout sur G. La conjecture de Fuglede pour le groupe G déclare que Ω *est spectral si et seulement s'il pave G.*

Cette conjecture a été initialement proposée par Fuglede en 1974 pour le cas $G = \mathbb{R}^d$. L'origine de la conjecture de Fuglede est un problème de Segal (1958) pour caractériser les domaines $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tels que les opérateurs différentiels $-i\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, -i\frac{\partial}{\partial x_d}$ définis sur leur domain de définition commun $C_c^\infty(\Omega)$ admettent des extensions auto-adjoints commutatives dans $L^2(\Omega)$. Fuglede a montré que c'est le cas si et seulement si Ω est un ensemble spectral, d'où le problème de caractériser les ensembles spectraux sur $\mathbb{R}^d$. Fuglede a aussi montré que c'est effectivement le cas si Ω pave $\mathbb{R}^d$ par un réseau $A\mathbb{Z}^d$ avec A étant une matrice non-singulière.

La conjecture de Fuglede a attiré une attention considérable pendant les dernières décennies. Beaucoup de résultats positifs sont obtenus dans des cas particuliers sous différentes restrictions, avant que Tao a prouvé que la direction "spectral $\Rightarrow$ pavage" est fausse au cas $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 5$. Après, Matolcsi, Matolcsi–Kolountzakis, Farkas–Gy, Farkas–Matolcsi–Móra ont donné une série de contre-exemples montrant que la conjecture est fausse pour toutes les deux directions pour $d \geq 3$. La validité de la conjecture pour les cas de $d = 1, 2$ reste inconnue. Iosevich, Katz, et Tao ont montré que la conjecture est vraie pour les convexes du plan $\mathbb{R}^2$.

Dans [32], nous confirmons la conjecture de Fuglede dans le cas $G = \mathbb{Q}_p$, i.e., dans un espace p-adique unidimensionnelle.

Theorem 10.10. *La conjecture de Fuglede dans $\mathbb{Q}_p$ est vraie. C'est-à-dire, un ensemble $\Omega \subset \mathbb{Q}_p$ admet un ensemble Λ de caractères continues de $\mathbb{Q}_p$ formant une base d'Hilbert de $L^2(\Omega)$ si et seulement si Ω pave $\mathbb{Q}_p$ par translation.*

Remarquons que la convexité sur $\mathbb{Q}_p$ n'est pas proprement définie. Cette différence donne des difficultés pour la recherche dans des espaces p-adiques. D'autre part, la propriété non-Archimédienne des espaces p-adiques simplifie la structure des pavages. Nous pouvons décrire les pavages par arbres p-homogènes.

11. Projet de recherche

Dans ce projet de recherche, je souhaite proposer quelques problèmes faisables dans le future prochain sur l'analyse multifractale des systèmes dynamiques, sur la théorie métrique des nombres et l'approximation diophantienne, sur la structure dynamique des systèmes p-adiques, et sur la conjecture de Fuglede dans un espace p-adique.

Analyse multifractale des moyennes de Birkhoff d'une fonction non bornée

Nous voulons effectuer une analyse multifractale des moyennes ergodiques de Birkhoff d'une fonction non bornée. Rappelons que l'analyse multifractale des moyennes de Birkhoff d'une fonction Hölderienne ou continue a été réalisée par de nombreux auteurs, par exemple, [BS01], [FLW02], et [TV03]. Néanmoins, il y a très peu de résultats sur l'analyse multifractale des moyennes de Birkhoff pour une fonction non-bornée.

Dans notre travail récent [25], nous avons étudié une fonction non-bornée très particulière qui est localement constante pour le système dynamique $T : x \mapsto 2x \bmod 1$ sur $(0, 1]$. Dans ce projet de recherche, nous commençons à travailler sur le même système dynamique, mais pour la fonction $\varphi : (0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(x) = 1/x$ pour $x \in (0, 1]$, qui n'est donc pas localement constante. Nous souhaitons étudier la taille de l'ensemble

$$\left\{x \in [0,1] : \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(x) + \cdots + \varphi(T^n x)}{n} = \alpha\right\}, \quad \text{avec } \alpha \geq 0.$$

Comme φ a une singularité 0 et est non bornée, pour tout $\alpha \geq 0$, l'ensemble ci-dessus est évidemment de mesure de Lebesgue zéro. Nous nous intéressons donc à sa dimension de Hausdorff.

Sans la continuité en 0, il semble que la théorie de l'opérateur de transfert de Ruelle–Perron–Frobenius ne marche plus. Avons nous encore un principe variationnel pour la dimension de Hausdorff ? Que peut-on dire pour une fonction non-bornée plus générale avec des singularités ? Pouvons-nous effectuer une analyse multifractale des moyennes ergodiques de Birkhoff pour une fonction avec une infinité de singularites, par exemple, $x \mapsto 1/\sin(1/x)$?

De plus, nous pouvons également faire une analyse multifractale des moyennes ergodiques de Birkhoff pour une fonction $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec φ_i étant non bornée. Pour les fonctions non bornées, nous avons aussi des problèmes sur le taux de croissance des sommes de Birkhoff comme nous avons fait dans [13, 19, 20, 25]. Nous pourrions aussi faire une telle analyse multifractale.

Analyse multifractale des moyennes ergodiques de Birkhoff multiples

Nous avons réussi à calculer des spectres multifractaux pour les moyennes ergodiques de Birkhoff multiples dans des cas particuliers ([9, 12, 26]). Considérons le système dynamique symbolique $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma)$ où σ est le shift. Nous avons obtenu dans [FSW16] et [26] les dimensions de Hausdorff des ensembles

$$E_\alpha(\varphi) := \left\{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k, x_{2k}) = \alpha\right\},$$

où φ est une fonction à quatre valeurs réelles : $\varphi(0,0), \varphi(0,1), \varphi(1,0), \varphi(1,1)$.

Nous voudrons travailler sur la même question pour un sous-shift de type fini. Il semble que nous ne puissions pas utiliser les résultats et les techniques dans [9, 12, 26]. Nous commencerons par un exemple plus simple. Nous voulons calculer la dimension de Hausdorff de l'ensemble

$$\mathbb{E} = \left\{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \ x_k x_{k+1} = 0, \ x_k x_{2k} = 0, \ \forall k \geq 1\right\}.$$

Par la condition $x_k x_{k+1} = 0$, $\mathbb{E}$ est un sous-ensemble d'un sous-shift de type fini (golden shift). En suite, nous envisageons de chercher la dimension de Hausdorff pour les ensembles de niveau :

$$\mathbb{E}_\alpha = \left\{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \ x_k x_{k+1} = 0, \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k x_{2k} = \alpha, \ \forall k \geq 1\right\}, \quad \alpha \in [0,1].$$

Comme un autre aspect de l'analyse multifractale des moyennes ergodiques multiples, nous pourrions considérer les points dont la limite des moyennes ergodiques multiples n'existe pas. Soit $T : X \to X$ une transformation continue sur un espace métrique compact (X, d). Soient $f_1, \cdots, f_\ell$ $(\ell \geq 2)$ ℓ fonctions réelles bornées sur X. Quelle est la dimension de Hausdorff de l'ensemble

$$N(f_1, \cdots, f_\ell) := \left\{ x \in X : \text{ la limite de } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f_1(T^k x) \cdots f_\ell(T^{\ell k} x) \text{ n'existe pas} \right\} ?$$

Est-il toujours de la dimension de Hausdorff comme celle de X ? De plus, considérons la suite $(f_1^j, \cdots, f_\ell^j)_{j \geq 1}$ des fonctions réelles bornées. La dimension de Hausdorff de l'intersection dénombrable

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} N(f_1^j, \cdots, f_\ell^j)$$

est-elle toujours comme celle de X ?

Plus généralement, nous souhaitons aussi montrer que ces ensembles de points dont la limite des moyennes ergodiques multiples n'existe pas vérifient la propriété de grandes intersections (Falconer [Fa94]). Ce type de question concernant les moyennes ergodiques simples a été étudié par Färm et Persson [FP11].

Approximation diophantienne uniforme dynamique et probabiliste

Le théorème de Dirichlet dans l'approximation diophantienne énonce que pour tout nombre réel θ, pour tout réel $N \geq 1$, il existe un entier n tel que $1 \leq n \leq N$ et $\|n\theta\| < 1/N$. Comme corollaire, pour tout nombre réel θ, il existe une infinité de nombres entiers n tels que $\|n\theta\| < 1/n$. Le théorème de Dirichlet et son corollaire nous dit que dans l'espace du cercle unité, 0 est bien approché par la suite $n\theta$ avec la vitesse polynomiale de degré un, en deux façons : une façon uniforme et une autre asymptotique (voir Waldschmidt [Wa12] pour les noms d'approximation uniforme et d'approximation asymptotique). L'approximation asymptotique a été beaucoup étudié par les mathématiciens. Par contre, pendant longtemps l'approximation uniforme a été oubliée et on peut trouver de résultats dans cette direction que très récemment (par exemple, [18, 28, 30], et [K17, KW19]).

Sur la recherche de l'approximation uniforme, on pourra remplacer la suite $n\theta$ dans le théorème de Dirichlet par une orbite d'un système dynamique ou par une suite aléatoire. Ces dernières sont appélées l'approximation diophantienne uniforme dynamique/probabiliste.

Dans [18], nous avons étudié l'approximation diophantienne uniforme de la suite $\{T_\beta^n(x)\}$ où T_β est la bêta-transformation avec $\beta > 1$, et x est un point dans $[0, 1]$. En général, pour un système dynamique chaotique (X, T), nous proposons d'étudier l'approximation diophantienne uniforme de la suite $\{T^n(x)\}$, où $x \in X$ est un point dans l'espace. Nous envisageons qu'il y a un principe général pour l'approximation diophantienne uniforme pour des systèmes dynamiques chaotiques. On pourra comparer ce dernier principe avec le principe de transfert de mass de Beresnevich et Velani [BV06] pour l'approximation diophantienne asymptotique.

Comme un exemple important dans les domaines de théorie des nombres et des systèmes dynamiques, nous proposons aussi d'étudier l'approximation diophantienne uniforme pour le système de Gauss associé aux fractions continues. Nous pouvons commencer avec l'approximation uniforme d'un réel par des nombres irrationnels quadratiques dont les développements en fraction continue finissent avec $1, 1, \ldots$. Nous souhaitons calculer la taille (mesure de Lebesgue, dimension de Hausdorff) de l'ensemble des nombres réels qui sont uniformément bien approchés par ces irrationnels quadratiques avec une vitesse donnée. Nous soulignons que dans le cas d'approximation asymptotique, une telle recherche, qui porte le nom "spectre de Lagrange quadratique" a apparu dans les articles de Parkkonen–Paulin [PP11] et de Bugeaud [Bu14].

Récemment, en collaboration avec Bing Li, Sanju Velani et Evgeniy Zorin ([LLVZ]), nous avons étudié l'approximation diophantienne asymptotique simultanée du système $\times 2$ et du système $\times 3$

sur l'intervalle unité $[0,1]$. Précisément, pour une fonction positive $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, nous avons calculé la taille de l'ensemble

$$W := \big\{x \in [0,1] : \max\{\|2^n x\|, \|3x\|\} < \psi(n),\ \text{pour une infinité de } n\big\}.$$

Nous avons montré que W est de mesure de Lebesgue nulle ou pleine selon $\sum_{n=1}^{\infty} \psi(n)^2 < \infty$ ou $= \infty$. Si $\psi(n) = 3^{-\tau n}$ avec $0 < \tau < 1$, nous avons $\dim_H W = (1-\tau)/(1+\tau)$. Pour $\tau > 1 - (\log 2/\log 3)$, notre preuve est conditionnelle à la validité de la conjecture abc. On voit donc que la dimension de Hausdorff fortement dépend de certaine propriété arithmétique. Parallèlement, il est naturel d'étudier l'approximation uniforme correspondante. On se demande la mesure de Lebesgue et la dimension de Hausdorff de l'ensemble

$$U := \big\{x \in [0,1] : \forall N \gg 1, \max\{\|2^n x\|, \|3x\|\} < \psi(N) \text{ admet une solution } 1 \leq n \leq N\big\}.$$

Nous avons encore une loi du zéro-un pour la mesure de Lebesgue de U ? La dimension de Hausdorff de U dépend-elle d'une propriété arithmétique ?

Pour l'approximation diophantienne uniforme, nous pouvons aussi proposer la question en version probabiliste. Précisément, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite aléatoire sur le tore $\mathbb{T}$. Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante des réels positifs et de limite 0. Nous proposons d'étudier l'ensemble liminf suivant :

$$E = \liminf_{N\to\infty} \bigcup_{n=0}^{N} B(x_n, r_N) = \big\{x \in \mathbb{T} : \forall N \gg 1, |x_n - y| < r_N \text{ a une solution } 1 \leq n \leq N\big\}.$$

Évidemment, les points dans E sont des points qui sont uniformément bien approchés par la suite aléatoire $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec la suite de vitesse $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous rappelons que l'ensemble limsup $F := \limsup_{n\to\infty} B(x_n, r_n)$ correspondant est l'ensembles des points qui sont asymptotiquement bien approchés par $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le problème de la taille de l'ensemble F, qui est dit aussi problème de recouvrement aléatoire, a été beaucoup étudié par Dvoretzky, Erdös, Kahane, Mandelbrot, Shepp, et al. Dans [38], en collaboration avec Henna Koivusalo et Tomas Persson, nous avons effectué une première essai d'étude sur la taille de E dans le cas où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est i.i.d et de la distribution uniforme. Concernant la dimension de Hausdorff, nous avons trouvé des estimations sur les bornes supérieure et inférieure. Il y en a donc encore beaucoup de questions à résoudre. Dans cette direction, nous pouvons aussi faire la même recherche quand la suite i.i.d. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une autre distribution. Que sera changé si la distribution n'est plus uniforme ? Puis, que nous pouvons dire si la suite n'est plus indépendante ?

Systèmes dynamiques sur le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques

Les polynômes et les fonctions rationnelles comme systèmes dynamiques sur le corps $\mathbb{Q}_p$ ou sur sa droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ sont beaucoup étudiés. On trouve souvent deux structures dynamiques différentes. Pour les polynômes à coefficients entiers [7, 16, 17, 21] et les fonctions rationnelles ayant bonne réduction [14, 22], les systèmes dynamiques sont 1-lipschitziens et on les décrit en faisant une décomposition minimale de l'espace. Pour les polynômes et fonctions rationnelles dilatants, on trouve souvent des sous-systèmes dynamiques qui sont conjugués aux sous-shifts de type fini [1, 23, 27]. Néanmoins, ces ne sont pas les seules structures dynamiques existantes pour les polynômes et les fonctions rationnelles.

Soit f un polynôme ou une fonction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$. Un point x est appelé *critique* si $f'(x) = 0$. Au voisinage d'un point critique, la dynamique a une attraction très forte. Si ce point critique est approché par des orbites chaotiques, alors la dynamique a aussi une dilatation forte au voisinage de ce point critique, ce qui donne beaucoup de difficultés à exposer la structure globale du système dynamique. Dans son article [RiL05], Rivera-Letelier a construit une famille de polynômes dans $\mathbb{Q}_p$ qui admettent des points critiques récurrents. Plus précisément, pour un entier $d > 1$, considérons la famille des polynômes

$$P_t(x) = -p^{-d} x(x-1)^d + t,$$

avec un paramètre $t \in \mathbb{Q}_p$. Rivera-Letelier [RiL05] a montré qu'il existe des paramètres t arbitrairement petits pour lesquels le point critique $x = 1$ de P_t est récurrent et non-périodique. Remarquons que de tels paramètres n'ont pas une expression précise.

Dans la prépublication [40], en collaboration avec Shilei Fan, Hongming Nie et Yuefei Wang, nous avons étudié la structure dynamique globale d'un polynôme de Rivera-Letelier. Prenons $d = 2$, $p = 2$ et $t = 0$, et considérons le polynôme

$$P : x \mapsto -\frac{x(x-1)^2}{4} \quad \text{sur } \mathbb{Q}_2.$$

On trouve que le point critique $x_1 = 1$ est envoyé sur le point fixe $x_0 = 0$ au voisinage duquel la dynamique est expansive. La structure globale d'un tel système n'a jamais été examinée dans la littérature. Nous avons montré qu'un tel système dynamique peut être modélisé par une chaîne de Markov topologique dénombrable. En fait, plus généralement, nous avons décrit la structure dynamique de toutes les fonctions rationnelles géométriquement finies (les orbites des points critiques sont finies) : sur leur ensembles de Julia, la dynamique est conjuguée à une chaîne de Markov topologique finie ou dénombrable, et sur leurs ensembles de Fatou, la dynamique est décrite par une décomposition minimale finie ou dénombrable.

Il nous semble que la dynamique d'une fonction rationnelle sans point critique sauvage serait décrite de même façon, c'est-à-dire, elle est conjuguée à une chaîne de Markov topologique finie ou dénombrable. D'après nos études dans [40], il faut examiner les comportements des orbites des points critiques. Si ces orbites accumulent eux mêmes, la dynamique est plus compliquée à décrire.

Conjecture de Fuglede dans un espace p-adique

La conjecture de Fuglede a été démontrée dans [32] pour l'espace p-adique unidimensionnel, i.e., le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques. Une question naturelle est donc posée : la conjecture de Fuglede est-elle vraie pour les espaces p-adiques de dimension $d \geq 2$? Nous pouvons commencer par étudier le cas plus simple en supposant que l'ensemble spectral Ω est compact-ouvert. Dans ce cas, on pourra écrire

$$\Omega = \bigsqcup_{a \in C} a + p^n \mathbb{Z}_p^d, \quad \text{où } C \subset \{0, 1, \cdots, p^n - 1\}^d.$$

On peut montrer que Ω est spectral dans $\mathbb{Q}_p^d$ si et eulement si C est spectral dans $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^d$. D'après les résultats de [Aetal], on pourra montrer qu'il existe des ensembles spectraux compact-ouverts qui ne sont pas tuiles de pavage dans $\mathbb{Q}_p^5$ pour tout premier impair p et dans $\mathbb{Q}_p^4$ pour les premiers p tel que $p \equiv 3 \mod 4$. Pour $d = 3$, il existe un ensemble spectral dans $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^3$ qui n'est pas une tuile de pavage [KM06], ce qui implique qu'il y un ensemble spectral compact-ouvert qui n'est pas une tuile de pavage dans $\mathbb{Q}_2^3$. Donc en général, il est très probable que pour $d \geq 3$, la conjecture est fausse pour $\mathbb{Q}_p^d$. Nous nous proposons de chercher des contre-exemples dans $\mathbb{Q}_p^4$ pour p tel que $p \equiv 1 \mod 4$, puis dans $\mathbb{Q}_p^3$ pour tout premier $p \geq 3$.

D'autre part, on n'a trouvé aucun contre-exemple comme une tuile de pavage dans $\mathbb{Q}_p^d$ qui n'est pas un ensemble spectral. Nous nous proposons donc de démontrer ou réfuter cette conjecture uni-directionnelle de Fuglede.

Une question plus intéressante est d'étudier la conjecture de Fuglede dans $\mathbb{Q}_p^2$. En fait, dans $\mathbb{Q}_p^2$, une tuile de pavage ou un ensemble spectral n'est pas nécessairement un compact-ouvert (presque sûrment). Posons $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(p^n, p^{-n-1})$. Soient

$$\begin{aligned} A_0 &= S \cup (B(1, p^{-1}) \setminus (1 + S)), \\ A_1 &= (B(0, p^{-1}) \cup B(1, p^{-1})) \setminus A_0, \\ A_i &= B(i, p^{-1}) \ \text{ for } \ 2 \leq i \leq p - 1. \end{aligned}$$

Définissons

$$\Omega := \bigcup_{i=0}^{p-1} A_i \times B(i, p^{-1}).$$

Alors Ω n'est pas presque sûrement compact-ouvert, mais il est une tuile de pavage de $\mathbb{Q}_p^2$. Il nous semble qu'il y a des tuiles de pavage dans $\mathbb{Q}_p^2$ qui ont des bords fractals comme les tuiles de pavage de Rauzy dans $\mathbb{R}^2$. Pour chercher des fractals de Rauzy dans $\mathbb{Q}_p^2$, une possibilité serait d'étudier la β-transformation dans $\mathbb{Q}_p$. L'article récent [SSS16] donnera des idées.

Références

[Aetal] C. Aten, B. Ayachi, E. Bau, D. FitzPatrick, A. Iosevich, H. Liu, A. Lott, I. MacKinnon, S. Maimon, S. Nan, J. Pakianathan, G. Petridis, C. Rojas Mena, A. Sheikh, T. Tribone, J. Weill, C. Yu , *Tiling sets and spectral sets over finite fields.* J. Funct. Anal. **273** (2017), 2547–2577.

[BS01] L. Barreira, B. Saussol, *Variational principles and mixed multifractal spectra*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 10, 3919–3944.

[BV06] V. Beresnevich, S. Velani, *A mass transference principle and the Duffin ?Schaeffer conjecture for Hausdorff measures*, Ann. of Math. (2) **164** (2006), 971–992.

[Bu14] Y. Bugeaud, *On the quadratic Lagrange spectrum* Yann Bugeaud Math. Z. **276**, (2014) 985–999.

[Fa94] K. J. Falconer, *Sets with large intersection properties*, J. London Math. Soc. **49** (1994), 267–280.

[FSW16] A.H. Fan, J. Schmeling and M. Wu, *Multifractal analysis of some multiple ergodic averages*, Adv. Math. **295** (2016), 271–333.

[FP11] D. Färm, T. Persson, *Large intersection classes on fractals*, Nonlinearity **24** (2011), 1291–1309.

[FLW02] D.-J. Feng, K.-S. Lau, and J. Wu, *Ergodic limits on the conformal repellers*, Adv. Math. **169** (2002), no. 1, 58–91.

[K17] D. Kelmer *Shrinking targets for discrete time flows on hyperbolic manifolds.* Geom. Funct. Anal. **27** (no. 5), (2017), 1257–1287.

[KW19] D. Kleinbock, N. Wadleigh, *An inhomogeneous Dirichlet theorem via shrinking targets*, Compositio Math. **155** (2019), no. 7, 1402–1423.

[KM06] M. N. Kolountzakis and M. Matolcsi, *Complex Hadamard matrices and the spectral set conjecture*, Collectanea Mathematica, **57** (2006), 281–291.

[LLVZ] B. Li, L. Liao, S. Velani, E. Zorin, *The Shrinking Target Problem for Matrix Transformations of Tori : developing a manifold theory*, in preparation.

[PP11] J. Parkkonen, F. Paulin, *Spiraling spectra of geodesic lines in negatively curved manifolds.* Math. Z. **268** (2011) 101–142.

[RiL05] J. Rivera-Letelier, *Wild recurrent critical points*, J. London Math. Soc. (2) **72** (2005) 305–326.

[SSS16] K. Scheicher, V.F. Sirvent, P. Surer, *Beta-expansions of p-adic numbers*, Ergodic Theory Dynam. Systems **36**, (2016), 924–943.

[TV03] F. Takens and E. Verbitskiy, *On the variational principle for the topological entropy of certain non-compact sets*, Ergodic Theory Dynam. Systems **23** (2003), no. 1, 317–348.

[Wa12] M. Waldschmidt, *Recent Advances in Diophantine Approximation.* Number Theory, Analysis and Geometry. 659–704. New York : Springer, 2012.