Combattre les idées fausses à coup de contre-exemples

Ce recueil tente de rencenser un maximum d'idées fausses rencontrées [1] chez les candidats à l'agrégation de mathématiques. Pour l'utiliser, c'est très simple : trouvez pour chaque énoncé ci-dessous un contre-exemple, le plus simple possible. Parfois, un dessin suffit : le but premier est de *vous* convaincre que l'idée est fausse.

Il est en particulier important de noter que

tous les énoncés ci-dessous sont **faux**.

1 Algèbre linéaire

Idée fausse 1. Soit E un espace vectoriel qui se décompose en $E = A \oplus B$. Soit F un sous espace de E. Il existe A' un sous-espace de A et B' un sous-espace de B tels que $F = A' \oplus B'$.

Idée fausse 2. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel. Tout espace stable de f est somme directe de sous-espaces de ses espaces propres.

Idée fausse 3. Soient $f, g : E \to E$ des endomorphismes d'un espace vectoriel. Si f et g commutent, alors tout espace stable de l'un est aussi stable pour l'autre.

Idée fausse 4. Un système d'équations linéaires avec second membre de n équations à k inconnues n'a jamais de solution si $n > k$.

Idée fausse 5. Un système d'équations linéaires avec second membre de n équations à k inconnues a toujours une infinité de solutions si $n < k$.

Idée fausse 6. Une matrice à coefficients dans un anneau commutatif est inversible sur cet anneau si et seulement si son déterminant est non nul.

Idée fausse 7. Si A et B sont des matrices complexes carrées de même taille, on a $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.

Idée fausse 8. Si A est une matrice diagonale et B une matrice triangulaire de même taille, alors A et B commutent.

Idée fausse 9. L'application $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ est surjective.

1. ou qu'on peut s'attendre à rencontrer, ou qu'on aimerait vraiment éviter de rencontrer.

2 Groupes

Idée fausse 10. Soit G un groupe et H un sous-groupe. Le quotient G/H (l'ensemble des classes à gauche) admet une structure de groupe si et seulement si H est distingué.

Idée fausse 11. Si deux éléments d'un groupe sont conjugués, ils commutent.

Idée fausse 12. Un sous-groupe d'un groupe simple est simple.

Idée fausse 13. Un groupe cyclique est simple.

Idée fausse 14. Soit G un groupe et $\rho : G \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ un morphisme (autrement dit une représentation complexe de G). Si S est un sous-espace de $\mathbb{C}^n$ stable par ρ, alors il existe un supplémentaire à S stable par ρ.

3 Anneaux, corps, polynômes et fractions rationnelles

Idée fausse 15. Un élément $\bar{m}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible si et seulement si m ne divise pas n.

Idée fausse 16. Si A est un anneau principal, alors l'anneau $A[X]$ est principal.

Idée fausse 17. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifie $P' = 0$, alors P est un polynôme constant.

Idée fausse 18. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si la fonction polynomiale définie par P est nulle, alors $P = 0$.

Idée fausse 19. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction polynômiale. Si les zéros de f ont un point d'accumulation, alors $f = 0$.

Idée fausse 20. Une fraction rationnelle réelle de la forme

$$R(X) = \frac{P(X)}{Q_1(X)^{k_1} \dots Q_n(X)^{k_n}}$$

où les Q_i sont des polynômes irréductibles peut s'écrire sous la forme

$$R(X) = \frac{a_{1,1}}{Q_1(X)} + \frac{a_{1,2}}{Q_1(X)^2} + \cdots + \frac{a_{1,k_1}}{Q_1(X)^{k_1}} + \cdots + \frac{a_{n,1}}{Q_n(X)} + \cdots + \frac{a_{n,k_n}}{Q_n(X)^{k_n}}$$

où les $a_{i,j}$ sont des réels.

Idée fausse 21. Deux coniques distinctes se coupent en au plus 4 points.

4 Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel

Idée fausse 22. La forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$Q(x, y, z) = (x + y)^2 + (y + z)^2 + (x - z)^2$$

est définie-positive.

Idée fausse 23. Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur un espace vectoriel réel E de dimension finie. Pour tout sous-espace F de E, on a $F \oplus F^\perp = E$.

Idée fausse 24. Soient ϕ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur un espace vectoriel réel E et F un sous-espace de E. Si la restriction de ϕ à F est nulle, alors F est réduit à 0.

Idée fausse 25. Il y a deux classes de conjugaison dans $\mathrm{O}(2)$: les rotations et les symétries.

5 Géométries affine, projective et euclidienne

Idée fausse 26. Dans le plan, la mesure d'un angle non orienté de vecteurs est définie modulo π.

Idée fausse 27. Dans $\mathbb{R}^n$, soient K un compact et C un convexe fermé. Il existe un unique couple $(k, c) \in K \times C$ réalisant la distance entre K et C $(d(X, Y) = \inf\{d(x, y) \,|\, x \in X,\ y \in Y\})$.

Idée fausse 28. Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$ et x un point de sa frontière. Si C a plusieurs hyperplans d'appui en x, alors x est un point extrémal.

Idée fausse 29. Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$ et x un point de sa frontière. Si x est un point extrémal, alors C a plusieurs hyperplans d'appui en x.

Idée fausse 30. Dans l'espace, soit $\mathscr{E}$ un ellipsoïde et F, F' ses foyers. Il existe un nombre p tel que pour tout $M \in \mathscr{E}$ on ait $MF + MF' = p$.

6 Topologie

Idée fausse 31. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. Une composante connexe de A est ouverte et fermée dans A.

Idée fausse 32. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et x un point de la frontière de K. Il existe alors une boule ouverte $B(y, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus K$ telle que $x \in \bar{B}(y, r)$.

7 Analyse à une variable réelle

Idée fausse 33. Soient (u_n) et (v_n) des suites réelles. Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum_0^n u_k \sim \sum_0^n v_k$.

Idée fausse 34. Soient (u_n) et (v_n) des suites réelles. Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum_0^n u_k = o(\sum_0^n v_k)$.

Idée fausse 35. Si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet un développement en série entière à l'ordre k en 0, alors elle est k fois dérivable en 0.

Idée fausse 36. Une fonction convexe $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est toujours continue.

Idée fausse 37. Une fonction convexe $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est toujours dérivable sur $]0,1[$.

8 Analyse à une variable complexe

Idée fausse 38. Toute fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ admet une primitive holomorphe.

9 Calcul différentiel

Idée fausse 39. Si une fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dérivable dans toutes les directions en 0, alors elle est différentiable en 0.

10 Calcul intégral et probabilités

Idée fausse 40. Si une suite de fonctions $f_n \in L^p(\mathbb{R})$ converge en norme L^p (avec $1 \leq p < \infty$), alors elle converge presque partout.

Idée fausse 41. Si une suite de variables aléatoires réelles X_n converge en loi, alors elle converge en probabilités.

Idée fausse 42. Si une suite de variables aléatoires converge en probabilité, alors elle converge presque sûrement.

11 Analyse fonctionnelle

Idée fausse 43. Si X est un espace métrique complet et $f : X \to X$ vérifie $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ pour tous x, y, alors f admet un unique point fixe.

12 Géométrie différentielle

Idée fausse 44. Soit $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ une courbe injective, supposée C^∞. Alors il existe un ε tel que $\gamma(]-\varepsilon,\varepsilon[)$ soit une sous-variété.

Idée fausse 45. Une application $X : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ qui est C^1 et de differentielle partout injective est un homéomorphisme sur son image.

Idée fausse 46. Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface et x un de ses points. Si aucun voisinage de x dans Σ n'est contenu dans un des demi-espaces fermés défini par $T_x\Sigma$, alors la courbure de Gauss de Σ en x est strictement négative.