Des ondelettes pour détecter les ondes gravitationnelles

Eric Chassande-Mottin, Stéphane Jaffard, Yves Meyer

31 mars 2016

Le 14 septembre 2015, les détecteurs américains LIGO effectuaient la première observation d'une onde gravitationnelle [6] issue de la coalescence de deux trous noirs. L'extraction du signal astrophysique des données de ces instruments a été réalisée par une variété de techniques d'analyse. L'une d'entre elles [13], qui a identifié le signal seulement trois minutes après l'acquisition des données, repose sur une décomposition en ondelettes des observations. Plus précisément, les observations sont décomposées sur des "bases de Wilson", bases orthonormées qui réalisent une analyse de Fourier locale du signal. Longtemps conjecturée, la construction explicite de telles bases en 1991 est l'aboutissement d'un long dialogue entre mathématiciens, physiciens et analystes du signal. Nous verrons pourquoi elles sont pertinentes pour la détection des ondes gravitationnelles.

Le fameux principe d'incertitude d'Heisenberg exprime le fait qu'une fonction et sa transformée de Fourier ne peuvent être arbitrairement bien localisées autour d'un point et d'une fréquence donnés, les gaussiennes réalisant le "meilleur compromis". La mécanique quantique et le traitement du signal ont motivé la recherche de bases de $L^2(\mathbb{R})$ dont les éléments seraient *uniformément* bien localisés en temps et en fréquence. Ainsi, Dennis Gabor, dans son célèbre texte fondateur "Theory of communication" de 1946, propose de décomposer tout signal à l'aide de gaussiennes translatées en temps et en fréquence, c'est-à-dire sur les fonctions

$$g_{m,n}(t) = e^{2i\pi\alpha mt} g(t-\beta n), \qquad m,n, \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

où g est la gaussienne

$$g(t) = 2^{1/4} e^{-\pi t^2}.$$

En prenant l'image de la musique, la décomposition sur un tel système réaliserait automatiquement une *dictée* musicale : un grand coefficient associé à la fonction $g_{m,n}$ indiquerait la position de la note (localisée autour de l'instant βn) et sa fréquence ($2\pi\alpha m$). Au début des années 1980, le rêve d'une base aussi simple s'effondre : suivant la valeur du produit $\alpha\beta$, le système de Gabor n'est pas générateur ou est redondant.

Plus grave : le théorème de Balian-Low énonce l'impossibilité d'une base du type (1) dès que

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |g(x)|^2 dx < \infty \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi < \infty. \tag{2}$$

Le lecteur se persuadera aisément qu'en prenant $\alpha = \beta = 1$ et pour g la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,1]$, on obtient bien une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$, mais la fonction $\hat{g}$ est alors le sinus cardinal dont la transformée de Fourier décroît en $1/\xi$ et ne vérifie donc pas donc la seconde condition de (2). Le théorème de Balian-Low énonce qu'on ne peut pas espérer beaucoup mieux que cette analyse très brutale où l'on commence par "saucissonner" le signal en le restreignant à des intervalles de longueur 1, puis en réalisant ensuite une analyse en séries de Fourier sur chaque intervalle. En 1987, le physicien K.G. Wilson (prix Nobel de physique en 1982 pour ses travaux sur la théorie de la renormalisation), a une idée lumineuse pour sortir de cette impasse : remplacer dans (1) l'exponentielle $e^{2i\pi\alpha mt}$ par des sinus ou des cosinus, c'est à dire autoriser la localisation des fonctions de base autour de *deux* fréquences de signes opposés, ce qui suffit pour que le théorème de Balian-Low ne s'applique plus. Il est remarquable que cette légère modification de perspective change aussi radicalement les données du problème : en 1991, la première "base de Wilson" explicite est construite [9] : on dispose d'une unique "fenêtre" ψ, et la base orthonormée obtenue est du type

$$\psi_{0,n}(t) = \psi(t-n) \qquad n \in \mathbb{Z},$$

$$\psi_{l,n}(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\psi\left(t - \dfrac{n}{2}\right)\cos(2\pi l t) & \text{si } l+n \in 2\mathbb{Z}, \\ \\ \sqrt{2}\psi\left(t - \dfrac{n}{2}\right)\sin(2\pi l t) & \text{si } l+n \in 2\mathbb{Z}+1; \end{cases}$$

On peut alors choisir ψ telle que ψ et $\hat{\psi}$ soient à décroissance exponentielle, ou bien l'une à support compact et l'autre à décroissance rapide. Une variante est constituée par les "ondelettes de Malvar" [11], dont la simplicité algorithmique est encore plus grande, puisque la base obtenue est de la forme

$$\psi_{l,n}(t) = \psi(t-n)\sin\left((l+1/2)\,\pi t\right), \quad n, l \in \mathbb{Z}.$$

Dans les deux cas, la décomposition réalise une analyse de Fourier "à fenêtre", et l'analyse sur de telles bases permet d'effectuer une *décomposition temps-fréquence* du signal. Bien que leur construction ait été motivée par des problèmes fondamentaux de physique théorique (en théorie de la renormalisation), les bases de Wilson attireront peu l'attention des physiciens ; la situation est un peu différente du côté du traitement du signal où les ondelettes de Malvar, pour lesquelles on dispose de variantes où la taille de la fenêtre est adaptative [7], ont été utilisées pour la segmentation optimale de signaux sonores [5].

Les bases de Wilson sortent de l'oubli en 2012, lorsque Necula, Klimenko et Mitselmakher proposent de les utiliser pour la détection des ondes gravitationnelles [14].

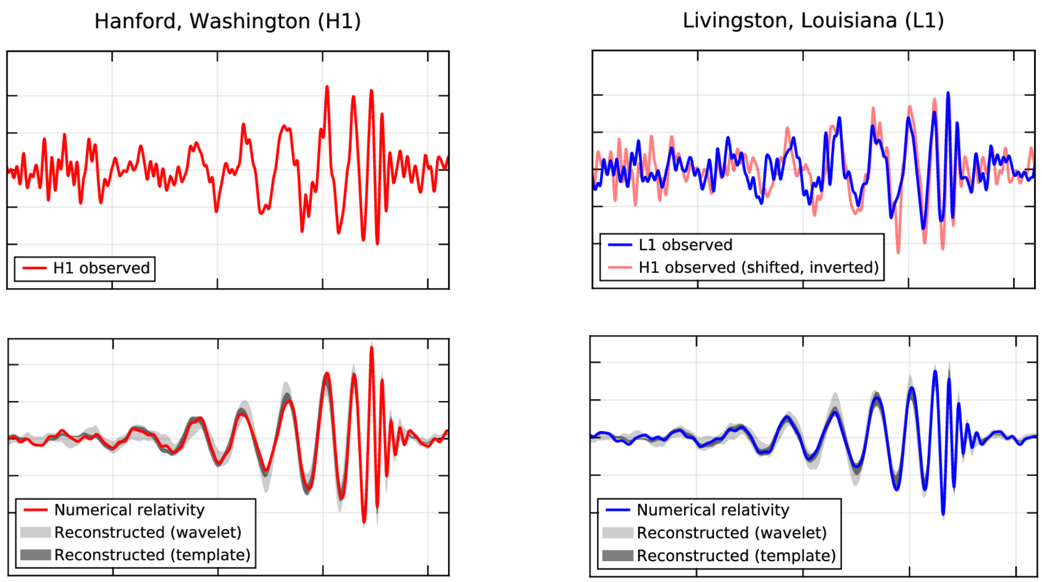
Pour eux,*"the main advantages of the Wilson-Daubechies transform are the low computational cost, spectral leakage control, flexible structure of the frequency sub-bands, and the existence of the analytic time-delay filters, which are important for localization of the gravitational-wave sources in the sky."* La variante qu'ils proposent utilise une ondelette dont la transformée de Fourier est à support compact, l'*ondelette de Meyer* [10], ce qui permet une meilleure séparation fréquentielle, et l'élimination d'artefacts sinusoïdaux dus, par exemple, aux résonances mécaniques dans les systèmes d'atténuation du bruit sismique. De plus, la représentation des données ainsi obtenue peut être calculée et inversée rapidement grâce à la Transformée de Fourier Rapide, deux éléments qui se traduisent par une plus grande efficacité numérique de l'algorithme de recherche.

Le signal gravitationnel issu de la coalescence de deux trous noirs est étroitement lié à la dynamique suivie lors de la spirale orbitale qui finira par la fusion de ses deux composants. La dynamique, et par conséquent l'onde gravitationnelle émise, peuvent être prédites avec une grande précision [1–3]. Le signal émis est quasi-périodique : il ressemble à une sinusoïde modulée, dont la fréquence f augmente, et se comporte, en première approximation, comme une loi de puissance $f \propto t^{-3/8}$, où t est le temps restant jusqu'à la fusion finale ($t = 0$). On peut alors effectuer une recherche ciblée de ce type de signaux en corrélant le modèle attendu avec les données, technique de détection communément appelée "filtrage adapté". Le modèle donnant un meilleur accord aux données permet d'estimer les paramètres de la source astrophysique.

La forme particulière du signal gravitationnel se traduit aussi par une représentation temps-fréquence avec un motif caractéristique essentiellement concentré autour de la loi de fréquence [8]. Ceci motive des approches alternatives basées sur la recherche de ces motifs temps-fréquence [4,12]. La chaîne d'analyse [13] s'inspire de ces idées et exploite la parcimonie de la décomposition du signal dans une base de Wilson, où il y a peu de coefficients d'amplitude importante. Les principes généraux de la stratégie d'analyse sont les suivants. Les deux détecteurs LIGO à une distance d'environ 3000 km produisent deux mesures indépendantes des ondes gravitationnelles. La série temporelle délivrée par chacun de ces détecteurs est projetée sur une base de Wilson. Dans les deux décompositions obtenues, on repère les coefficients dont l'amplitude diffère significativement de ce qui est obtenu en présence de bruit uniquement, puis on vérifie la cohérence en fréquence et en phase des signaux ainsi extraits des données des deux détecteurs. Cette approche non-paramétrique permet non seulement de détecter les fusions de deux trous noirs, mais aussi d'autres phénomènes astrophysiques, y compris ceux dont on ne connaît pas la "signature" gravitationnelle a priori.

L'observation des ondes gravitationnelles par les détecteurs LIGO, qui seront bientôt rejoints par le détecteur franco-italien Virgo, ouvre une voie radicalement nouvelle pour explorer l'univers. En effet, jusqu'à maintenant, les phénomènes astrophysiques étaient essentiellement observés grâce au rayonnement électromagnétique qu'ils émettent. Les ondes gravitationnelles nous permettent d'observer des objets astrophysiques n'émettant pas de lumière, chose attendue pour les objets très denses comme les trous noirs. Les méthodes de recherche présentées ici permettent ainsi à cette nouvelle astronomie de révéler les sources inattendues.

Onde gravitationnelle GW150914 enregistrée par les détecteurs LIGO de Hanford (H1, colonne de gauche) et de Livingston (L1, colonne de droite) le 14 septembre 2015 à 09 :50 :45 UTC. Les fréquences des séries temporelles sont filtrées pour ne conserver que la bande de fréquences la plus sensible du détecteur, et pour éliminer certaines "lignes spectrales" dues aux instruments de mesure.



En haut à gauche : Signal H1, en haut à droite : Signal L1 (en bleu). A droite, les deux signaux sont superposés (après avoir effectué le décalage en temps et l'inversion de signe nécessaires du fait que les deux détecteurs de Ligo ne reçoivent pas l'onde au même instant et sont orientés différemment).

En bas : Les fonctions en bleu et rouges sont des ondes gravitationnelles prévues par la théorie, dont les paramètres ont été choisis pour être au plus proche de l'onde détectée. Les régions ombrées indiquent les reconstructions possibles de l'onde gravitationnelle à partir des signaux initiaux, en utilisant une méthode par ondelette (gris clair) et une estimation bayésienne utilisant le modèle astrophysique de la forme d'onde gravitationnelle de la fusion de deux trous noirs (gris foncé). Ces deux reconstructions se recouvrent à 95

Images reproduites à partir du DOI http ://dx.doi.org/10.7935/K5MW2F23 et correspondant aux résultats annoncés dans [6]

Eric Chassande-Mottin est chargé de recherche du CNRS au laboratoire Astroparticule et cosmologie où il est responsable du groupe "Gravitation". Ses recherches portent sur l'analyse et l'exploitation des données des détecteurs d'ondes gravitationnelles terrestres, et du détecteur Virgo en particulier. Depuis 2014, il partage la coordination du groupe de la collaboration Virgo-LIGO en charge des recherches de sources d'ondes gravitationnelles transitoires.

Stéphane Jaffard est professeur de mathématiques à l'Université Paris Est. Ses recherches portent sur les aspects tant théoriques qu'appliqués de l'analyse multifractale et des décompositions en ondelettes. Il a été président de la SMF de 2007 à 2010.

Yves Meyer est professeur émérite à l'ENS Cachan et membre de l'Institut. Le prix Gauss lui a été remis lors de l'ICM de 2010, récompensant ses recherches en analyse harmonique, et plus particulièrement ses travaux concernant l'analyse par ondelettes.

Références

[1] L. Blanchet. Gravitational radiation from post-newtonian sources and inspiralling compact binaries. *Living Rev. Rel. arXiv :1310.1528 [gr-qc]*, 17 :3515, 2014. 3

[2] L. Blanchet, T. Damour, B. R. Iyer, C. M. Will, and A. G. Wiseman. Gravitational-radiation damping of compact binary systems to second post-newtonian order. *Phys. Rev. Lett.*, 74 :3515, 1995. 3

[3] A. Buonanno and T. Damour. Effective one-body approach to general relativistic two-body dynamics. *Phys. Rev. D arXiv :gr-qc/9811091 [gr-qc]*, 59 :084006, 1999. 3

[4] E. Chassande-Mottin and P. Flandrin. On the time-frequency detection of chirps. *Appl. Comp. Harm. Anal.*, 6 :252–281, 1999. 3

[5] C. D'Alessandro, X. Fang, E. Wesfreid, and M.V. Wickerhauser. Speech signal segmentation via malvar wavelets. In *Progress in wavelet analysis and applications, Y. Meyer and S. Roques Eds*, pages 305–308, Editions Frontières, 1993. 2

[6] B. Abbott et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116 :061102, 2016. 1, 4

[7] R.R. Coifman et Y. Meyer. Remarques sur l'analyse de fourier à fenêtre. *C.R. Acad Sci. Paris Sér. 1*, 312 :259–261, 1991. 2

[8] P. Flandrin. *Temps-Fréquence (2Ŕme ed.)*. HermŔs, 1998. 3

[9] S. Jaffard et J.-L. Journé I. Daubechies. A simple wilson orthonormal basis with exponential decay. *SIAM J. Math. Anal.*, 22 :554–573, 1991. 2

[10] S. Jaffard, Y. Meyer, and R. Ryan. *Wavelets : Tools for science and technology*. SIAM, 2011. 3

[11] H. S. Malvar. Lapped transforms for efficient transform/subband coding. *IEEE Trans. Patt. Acoust. Speech, Signal Proc.*, 38 :969–978, 1990. 2

[12] M. Morvidone and B. Torrésani. Time-scale approach for chirp detection. *Int. J. Wavelets. Multi.*, 1 :19–49, 2003. 3

[13] M. Drago-F. Salemi V. Tiwari G. A. Prodi C. Lazzaro K. Ackley S. Tiwari C. F. Da Silva Costa G. Mitselmakher S. Klimenko, G. Vedovato. Method for detection and reconstruction of gravitational wave transients with networks of advanced detectors. *Phys. Rev. D*, 93 :042004, 2016. 1, 3

[14] S. Klimenko et G. Mitselmakher V. Necula. Method for detection and reconstruction of gravitational wave transients with networks of advanced detectors. *Journal of Physics : Conference Series,*, 363 :012–032, 2012. 2