Principales contributions de Stéphane Jaffard dans le domaine de l'analyse multifractale

Mon activité principale s'est concentrée dans le domaine de l'analyse multifractale des fonctions. Cette notion est basée sur le concept de régularité ponctuelle, qui permet de mesurer comment la régularité d'une fonction change de point en point (on estime de combien elle diffère de son polynôme de Taylor au voisinage du point considéré). Ainsi les fonctions de Weierstrass ou le mouvement brownien ont le même exposant de Hölder en chaque point, qui vaut 1/2 dans le cas du brownien (on parle de fonctions monohölderiennes). A l'opposé la régularité de certaines fonctions varie de façn extrêmement erratique; leur exposant de régularité peut être partout discontinu; on parle alors de fonctions multifractales.

L'analyse multifractale trouve sa source dans les travaux de N. Kolmogorov sur la turbulence: Il a introduit une nouvelle quantité pour classifier les signaux: la *fonction d'échelle* $\eta(p)$ associée à un signal f est définie par

$$\int |f(x+h) - f(x)|^p dx \sim |h|^{\eta(p)}$$

dans la limite des petites échelles $h \to 0$. Dès les années 1960, cet outil a permis de rejeter l'hypothèse que le mouvement brownien fractionnaire soit un modèle possible de la turbulence pleinement développée à petite échelle. L'analyse multifractale est vraiment apparue en 1985, avec le travail fondateur d'Uriel Frisch et Giorgio Parisi qui sont partis de la remarque que les fonctions et processus ayant un exposant de régularité constant ont une fonction d'échelle affine; ils ont alors interprété la non-linarité de la fonction d'échelle comme indiquant la présence de différents exposants dans le signal analysé. Plus précisment, ils ont proposé une formule, le formalisme multifractal, qui relie la transformée de Legendre de la fonction d'échelle avec les dimensions fractionnaires des ensembles de points ayant un exposant donné (cette dernière fonction s'appelle le spectre multifractal du signal, noté $d(H)$, H étant l'exposant de régularité). L'analyse multifractale a ainsi deux aspects; l'un est mathématique et consiste à étudier, au moyen de ces nouveaux concepts, la régularité de fonctions et de processus: détermination de leur régularité en chaque point, calcul du spectre multifractal, vérification de la validité du formalisme multifractal; l'autre aspect concerne les applications; en effet la fonction d'échelle et ses variantes récentes fournissent des nouveaux outils de classification de signaux et d'images et de sélection de modèles. Mes principales contributions dans ce domaine sont les suivantes:

- 1996: Etude de la première fonction reconnue mathématiquement comme multifractale: la fonction de Riemann $\sum \sin(\pi n^2 x)/n^2$ et détermination de son spectre multifractal.
- 1997: Obtention des premiers résultats mathématiques généraux sur la validité du formalisme multifractal et étude des *séries de Davenport*: premier exemples de fonctions déterministes multifractales ayant un ensemble dense de sauts (ces fonctions jouent un rôle important en théorie analytique des nombres).
- 1998: Introduction du "formalisme multifractal grandcanoniques" (avec A. Arneodo, E. Bacry et J.-F. Muzy): il s'agit de l'étude simultanée de deux exposants de natures différentes (l(un concerne la régularité et l'autre l'oscillation).
- 1999: Obtention de la première grande classe de processus aléatoires dont les trajectoires sont multifractales: les processus de Lévy.
- 2000: Premiers résultats "génériques" (au sens de Baire) sur la validité du formalisme multifractal (on montre par exemple que "presque" toute fonction d'un espace de Sobolev est multifractale, et on détermine son spectre).
- 2002 : Analyse multifractale (avec J.-M. Aubry) d'une nouvelle classe générale de processus, les *séries d'ondelettes aléatoires*: leurs coefficients sont tirés au hasard suivant une loi fixée a priori.
- 2003: Introduction de la notion de *coefficients dominants* (sup locaux de coefficients d'ondelette), qui permet d'étendre la fonction d'échelle à des valeurs de p négatives. Ses propriétés mathématiques et la stabilité numérique de son calcul permettront à ces nouvelles fonctions d'échelle de s'imposer peu à peu dans toutes les applications de l'analyse multifractale.
- 2004: Construction de nouveaux espaces fonctionnels (généralisant les espaces de Besov) fournissant le cadre fonctionnel adapté à l'étude du

formalisme multifractal: il s'agit des *espaces d'oscillation* construits à partir des coefficients dominants, et des espaces S^ν décrivant la répartition de la taille des coefficients d'ondelettes à travers les échelles.

- 2005: Obtention (avec C. Melot) des propriétés d'un nouvel exposant de régularité, le p-exposant (qui doit être utilisé quand les données ne sont pas modélisables par une fonction localement bornée) et en particulier sa caractérisation par ondelettes, indispensable pour obtenir un nouveau formalisme multifractal adapté à ce cadre et les nouvelles fonctions d'échelle correspondantes.

- 2006 : Obtention (avec A. Fraysse) des premiers résultats génériques de multifractalité dans le cadre fourni par la prévalence.

- 2007 : Obtention avec P. Abry et H. Wendt des premiers résultats statistiques (par des méthodes de bootstrap) donnant des intervalles de confiance sur la fonction d'échelle de signaux expérimentaux.

- 2008 : Nouvelle utilisation du bootstrap pour déterminer, parmi les modèles de cascades, lesquels sont compatibles avec les données exprimentales de turbulence, ce que les seuls arguments physiques ne permettaient pas (travail avec P. Abry, B. Lashermes et S. Roux).

- 2009: Application des méthodes de bootstrap en analyse multifractale pour la classification d'images (collaborations avec P. Abry, B. Vedel, S. Roux et H. Wendt).

- 2010: Analyse multifractale de processus de Markov généraux solutions d'équations différentielles stochastiques (avec J. Barral, N. Fournier et S. Seuret); il s'agit du premier exemple "naturel" où les spectres multifractals évoluent avec le temps de façon aléatoire, ouvrant ainsi une nouvelle direction au sein de l'analyse multifractale.

- 2012: Première analyse multifractale d'une classe générale de champs aléatoires, les *champs de Lévy*, avec A. Durand.

- 2013 : Travail au sein du "Van Gogh challenge" lancé par le musée Van Gogh d'Amsterdam: Avec P. Abry et H. Wendt, nous mettons en évidence le fait que les méthodes de classification d'images obtenues précédemment permettent de distinguer, d'une part entre différentes périodes des toiles de Van Gogh, et d'autre part entre Van Gogh et ses imitateurs.

- 2014: Dans un travail très pluridisciplinaire (alliant mathématiciens, traiteurs d'images, physiciens, exprimentateurs, et spécialistes de photographies anciennes: P. Messier, C. Johnson, W. Sethares, A. Klein, C. Brown, A. Do, P. Klausmeyer, P. Abry, H. Wendt, S. Roux, N. Pustelnik, N. van Noord, L. van der Maaten, E. Postma, J. Coddington, L. Daffner, H. Murata, H. Wilhelm, S. Wood, M. Messier) nous montrons que les méthodes d'analyse par ondelettes anisotropes permettent une classification fine des papiers photographiques anciens, fournissant ainsi une aide à la détermination des auteurs de ces photographies.

- 2015-16: Dans une suite de quatre articles en collaboration avec R. Leonarduzzi, H. Wendt, P. Abry, C. Melot, S. Roux et M. Torres, nous construisons les fondements d'une analyse multifractale basée à la fois sur le p-exposant et sur des intégrées fractionnaires du signal; nous montrons comment elle conduit à une nouvelle classification des singularités ponctuelles, basée sur deux nouveaux exposants: les exposants de *lacunarité* et de *cancellation*, qui permettent de décrire de façon fine le comportement de la fonction au voisinage de la singularité.

- 2016: Réalisation, avec B. Martin, de l'analyse multifractale de la fonction de Brjuno, introduite par J.-C. Yoccoz, et qui joue un rôle fondamentale dans l'étude des systèmes dynamiques analytiques. Cette fonction n'est pas localement bornée, et nous montrons que le p-exposant fournit le "bon" outil pour réaliser son analyse.

- 2017: Avec C. Esser nous étudions la vitesse de convergence (ou de divergence, dans le cas non localement borné) des séries d'ondelettes et montrons que, génériquement (au sens de Baire ou de la prévalence) l'exposant de convergence associé a un comportement multifractal.

- 2018: Avec R. Leonarduzzi, P. Abry, H. Wendt, S. Jaffard, H. Touchette, nous introduisons une nouvelle méthode, numériquement stable, d'estimation de spectres multifractals non-concaves (la méthode de la transformèe de Legendre ne donne accès qu'à l'enveloppe concave du spectre), permettant ainsi à contourner la "malédiction de la concavité" qui était une limitation fondamentale à l'utilisation de l'analyse multifractale depuis ses débuts.

- 2019: Avec S. Seuret, H. Wendt, R. Leonarduzzi et P. Abry, dans une suite de trois articles, nous obtenons les premiers résultats mathématiques généraux concernant l'*analyse multifractale multivariée*: Il s'agit d'effectuer l'analyse multifractale simultanée de plusieurs signaux, permettant ainsi de comprendre comment leurs ensembles de singularités sont corrélés.

Cette étude ouvre la porte à de nouveaux champs d'application de l'analyse multifractale en traitement du signal, où les données étudiées sont de plus en plus souvent collectées par une grande quantité de capteurs, donnant ainsi accès à un nombre important de signaux corrélés que l'on veut analyser conjointement.

- 2020: Avec H. Krim, nous mettons en évidence une nouvelle propriété des décompositions sur le système de Haar: en rendant la base d'ondelettes de Haar redondante par un suréchantillonage d'un facteur 3 (on obtient ainsi un "tight frame"), ce nouveau système de décomposition permet de caractériser la régularité Hölderienne pour des exposants compris entre 0 et 1, levant ainsi la principale limitation à l'utilisation du système de Haar en analyse du signal et de l'image. Ce résultat ouvre de nouvelles perspectives en apprentissage profond, où des variantes du système de Haar, adaptées à la géométrie des données, sont couramment utilisées.