AGENCE NATIONALE DE LA RECHERCHE

Compte-rendu de fin de projet

Projet ANR- BS01-011-01

AMATIS

Analyse Multifractale et Applications au Traitement du Signal et de l'Image

Programme Blanc SIMI1 2011

A IDENTIFICATION

Acronyme du projet	AMATIS
Titre du projet	Analyse Multifractale et Applications au Traitement du Signal et de l'Image
Coordinateur du projet (société/organisme)	Stéphane Jaffard (LAMA, Université Paris Est Créteil Val de Marne)
Période du projet (date de début – date de fin)	1er Janvier 2012 30 septembre 2016
Site web du projet, le cas échéant	http://wiki-math.univ-mlv.fr/amatis/doku.php?id=index

Rédacteur de ce rapport	
Civilité, prénom, nom	Mr Stéphane Jaffard
Téléphone	01 45 17 65 84
Adresse électronique	jaffard@u-pec.fr
Date de rédaction	15/01/2017

Liste des partenaires présents à la fin du projet	Patrice Abry (Laboratoire de Physique, ENS Lyon)

B RESUME CONSOLIDE PUBLIC

Titre d'accroche : Analyse multifractale basée sur les p-exposants et applications en traitement du signal

Titre 1 : Outils mathématiques pour l'analyse des singularités et des oscillations ponctuelles des fonctions et constriction de paramètres de classification

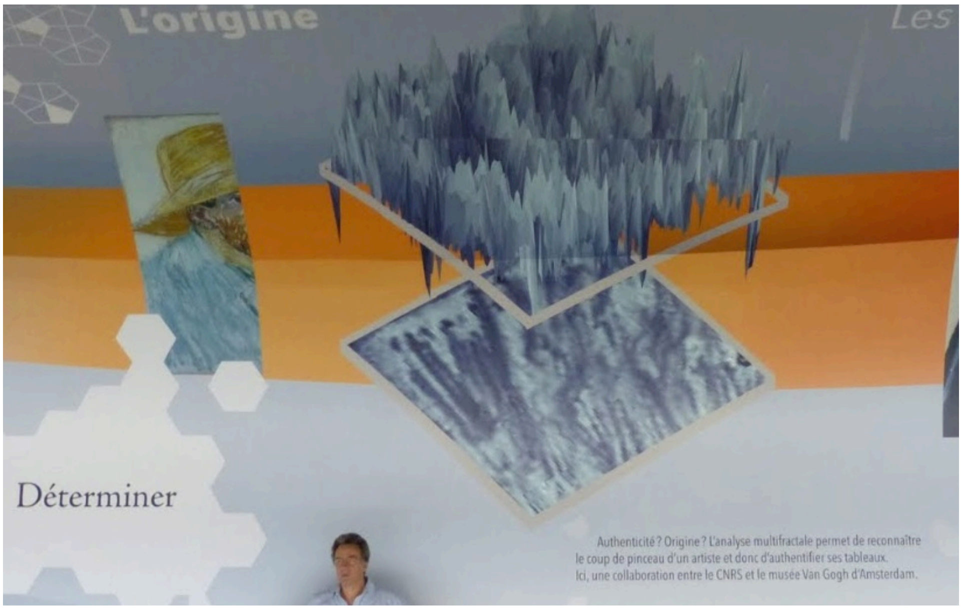
Sur le plan théorique, l'analyse multifractale caractérise les singularités ponctuelles des fonctions et permet de déterminer leurs dimensions fractionnaires. Ses applications ont pour but la mise en évidence de propriétés d'invariance d'échelle utilisées en classification et sélection de modèles. Des arguments heuristiques initialement proposés par Uriel Frisch et Giorgio Parisi ont permis de relier ces deux aspects par une transformée de Legendre (formalisme multifractal). Ceci a conduit à une nouvelle approche de l'étude des singularités de fonctions et de mesures, et à l'introduction de nouveaux paramètres performants dans de nombreuses applications. Malgré le succès de ses applications, les interactions entre développements théoriques et applications restaient insuffisantes. Ceci était dû, pour partie, au manque de coordination entre, d'une part, les contributions théoriques reposant sur une approche d'analyse fonctionnelle et de théorie géométrique de la mesure, et d'autre part, les applications dont le cadre naturel est stochastique et nécessitent une approche statistique. Le projet AMATIS proposait la construction d'un cadre cohérent et documenté qui s'appuie sur différentes approches théoriques et fasse le lien avec les applications. Les résultats mathématiques obtenus ont été testés sur toute une gamme d'applications. Une toolbox a été développée au sein du projet, cf :
https://www.irit.fr/~Herwig.Wendt/software.html
Cette adresse web contient contient les logiciels et la documentation correspondante.

Titre 2 : Nouveaux exposants ponctuels (lacunarité et cancellation) et mise en œuvre de formalismes multifractals grand-canoniques

Les différentes formulations du formalisme multifractal sont toujours basées sur la construction de quantités multirésolution adaptées. Une idée clef développée dans le projet a été de développer une ``seconde génération'' de quantités multirésolution basées sur des quotients de p-leaders, obtenus en faisant varier p ou un paramètre d'intégration fractionnaire. Ces nouvelles quantités permettent d'accéder à de nouveaux exposants ponctuels, qui ne sont plus des exposants de régularité mais permettent de quantifier le comportement de la fonction au voisinage de la singularité, notamment, son caractère ``lacunaire'' ou ``oscillatoire''. Un des développements mathématiques du projet a consisté en la construction de formalismes multifractals adaptés à ces nouveaux exposants, à la compréhension des espaces fonctionnels sous-jacents, mais aussi à la construction de fonctions déterministes et de processus aléatoires présentant ce type de singularités sur des ensembles fractals dont on peut estimer la dimension de Hausdorff, de façon à pouvoir tester sur ces exemples la validité (tant théorique que numérique) des résultats obtenus. Une partie statistique (méthodes de bootstrap) a permis d'établir des barres d'erreurs pour les expérimentations numériques.

Résultats majeurs : Sur le plan fondamental, un résultat majeur a été l'introduction de formalismes multifractals ``de seconde génération'' qui ne sont plus seulement bâtis sur des exposants de régularité, mais aussi des exposants d'autre nature [10, 11, 14, 20, 27]. Un autre aspect a été l'utilisation d'ondelettes anisotropes pour l'analyse multifractale de textures anisotropes [1, 2, 13, 21]. Les applications les plus spectaculaires ont été d'en déduire de nouveaux outils de classification de signaux, appliquées à l'analyse du rythme cardiaque de fœtus et de papiers photographiques anciens [3, 12, 18, 25, 28].

Production scientifique et brevets : Cette recherche est située trop en amont pour conduire à des dépôts de brevets. En dehors de la liste d'articles ci-dessous, la production scientifique la plus notable est la toolbox d'analyse multifractale accessible depuis la page web d'Herwig Wendt , cf.
https://www.irit.fr/~Herwig.Wendt/software.html
Ecrite en Matlab, elle permet d'effectuer l'analyse multifractal de signaux discrets, par les méthodes des coefficients dominants et des p-leaders. Elle fournit des intervalles de confiance basés sur la méthode de bootstrap.



Le travail en collaboration de Patrice Abry, Stéphane Jaffard et Herwig Wendt concernant la classification multifractale de peintures de Van Gogh a été choisi par le RATP et le CNRS pour

illustrer le ``Le couloir du temps'' (posters géants affichés en Septembre-Octobre 2016 dans la station de Montparnasse),cf:
http://www.cnrs.fr/fr/multimedia/expo/couloir-temps/couloir-temps.html

Informations Factuelles : Le projet AMATIS est un projet de recherche fondamentale, possédant aussi des aspects applicatifs, et coordonné par Stéphane Jaffard, en association avec Patrice Abry, ainsi que des membres des laboratoires suivants : LAMA (UPEC), Laboratoire de Physique de l'ENS Lyon) LMBA (Université de Bretagne Sud), l'IMM (Université Aix-Marseille), Laboratoire Paul Painlevé (Lille 1). Le projet a commencé en janvier 2012 et a duré 57 mois. Il a bénéficié d'une aide ANR de 225 000 € pour un coût global de l'ordre de 2 311 000 €

B.1 RESUME CONSOLIDE PUBLIC EN ANGLAIS

Multifractal analysis based on p-exponents and applications in signal analysis

Title 1 : Mathematical tools for the analysis of singularities and of pointwise oscillations of functions, and construction of new classification parameters

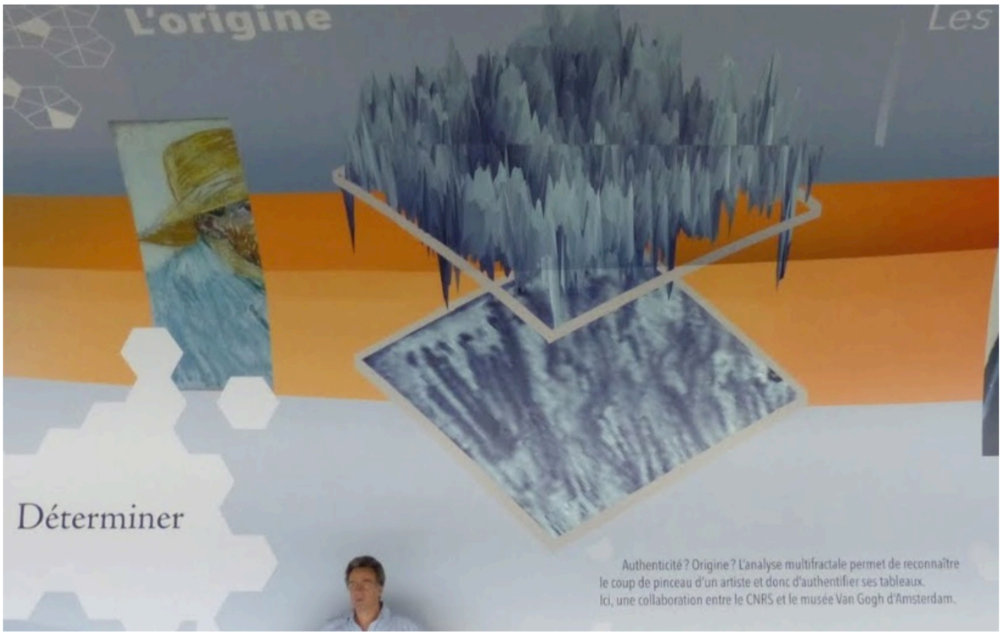
On the theoretical side, multifractal analysis deals with the characterization of pointwise singularities of functions and allows to determine their fractal dimensions. The purpose of its applications is to put into light scaling invariance properties used in classification and model selection. Heuristic arguments initially proposed by Uriel Frisch and Giorgio Parisi allowed to link these two sides by a Legendre transform (multifractal formalism). This led to new approaches for the analysis of singularities of functions and measures and the introduction of new parameters for classification. Despite its successes in applications, interactions between theoretical developments and applications remained scarce. This was partly due to a lack of coordinations between, on one side, on theoretical contributions lying, on a functional analysis and geometric measure theory approach and, on the other, on applications, for which the natural framework is stochastic and requires a statistical approach. A purpose of the AMATIS project was the construction of a coherent and documented framework based on several theoretical approaches an which would be related to applications. We tested the mathematical results obtained on a large panel of applications. A toolbox was developed inside the project, see :
https://www.irit.fr/~Herwig.Wendt/software.html
which contains the software and the corresponding documentation.

Title 2 : New pointwise exponents (lacunarity and cancellation) and elaboration of grandcanonical multifractal formalisms

The numerous formulations of the multifractal formalism are based on the construction of taylored multiresolution quantities. A key idea worked out in the project was to develop ``second generation'' multiresolution quantities, based on ratios of p-leaders, and obtained by varying either p or a fractional integration parameter. These new quantities opened the way to new pointwsise exponents, which are no more regularity exponents but allow to quantify the behavior of the function in the vicinity of the singularity, and in particular its ``lacunary'' or ``oscillatory'' behavior. One of the mathematical developments of the project consisted in the construction of multifractal formalisms adapted to these new exponents, in the comprehension of the underlying function spaces, and also in the construction of deterministic functions and random processes which display these types of singularities on fractal sets, the dimension of which are computed. One can use these examples in order to test the validity (both theoretical and numerical) of the results obtained. A statistical part (bootstrap methods) allowed to establish error bars for numerical experiments.

Main results : On the fundamental side, a major result was the introduction of ``second generation'' multifractal formalisms which are no more derived from smoothness exponents but from exponents of other nature [10, 11, 14, 20, 27]. Another key aspect is the use of anisotropic wavelets for the multifractal analysis of anisotropic functions. The most spectacular applications lied in the derivation of new signal classification tools and their working out on fetuses heart-beats [26,42] and ancient photographic papers [3, 12, 18, 25, 28].

Scientific output : This research is too upstream to yield patents. On top of the list of the papers listed below, the most noteworthy output of the project is the multifractal analysis toolbox accessible from Herwig Wendt's webpage , see.
https://www.irit.fr/~Herwig.Wendt/software.html
Available in Matlab, it allows to perform the multifractal analysis of discrete data using the wavelet leaders and the p-leaders method It also yields confidence intervals using the bootstrap method.



The joint work of Patrice Abry, Stéphane Jaffard and Herwig Wendt concerning the multifractal classification of Van Gogh's paintings was picked by RATP and CNRS as one of the illustrations of ``Le couloir du temps'' (giant posters displayed in September-October 2016 in the métro station Montparnasse), see :
http://www.cnrs.fr/fr/multimedia/expo/couloir-temps/couloir-temps.html

The AMATIS project is a fundamental research project, which also has applied sides, and was coordinated by Stéphane Jaffard in association with Patrice Abry and the following laboratories: LAMA (UPEC), Physics laboratory of the ENS Lyon) LMBA (Université de Bretagne Sud), IMM (Université Aix-Marseille), Paul Painlevé laboratory (Lille 1). The project started in January 2012 and lasted 57 months. It benefitted from an ANR funding of 225 000 € for a global cost of 2 311 000 €

C MEMOIRE SCIENTIFIQUE

Mémoire scientifique confidentiel : non

C.1 RESUME DU MEMOIRE

Sur le plan théorique, l'analyse multifractale caractérise les singularités ponctuelles des fonctions et permet de déterminer leurs dimensions fractionnaires. Ses applications ont pour but la mise en évidence de propriétés d'invariance d'échelle utilisées en classification et sélection de modèles. Des arguments heuristiques initialement proposés par Uriel Frisch et Georgio Parisi ont permis de relier ces deux aspects par une transformée de Legendre (formalisme multifractal). Ceci a conduit à une nouvelle approche de l'étude des singularités de fonctions et de mesures, et à des outils performants pour la classification et la sélection de modèles. Malgré le succès de ses applications, les interactions entre développements théoriques et applications restaient insuffisantes. Ceci était dû, pour partie, au manque de coordination entre les contributions théoriques reposant sur une approche d'analyse fonctionnelle et de théorie géométrique de la mesure, et les applications dont le cadre naturel est stochastique et nécessitent une approche statistique. Le projet AMATIS avait pour but la construction d'un cadre cohérent et documenté qui s'appuie sur différentes approches théoriques et fasse le lien avec les applications.

Les différentes formulations du formalisme multifractal sont basées sur la construction de quantités multirésolution adaptées. Une idée clef développée dans le projet a été de développer une ``seconde génération'' de quantités multirésolution, basées sur des rapports de p-leaders, obtenus en faisant varier p ou un paramètre d'intégration fractionnaire. Ces nouvelles quantités permettent d'accéder à de nouveaux exposants ponctuels, qui ne sont plus des exposants de régularité mais permettent de quantifier le comportement de la fonction au voisinage de la singularité, notamment, son caractère ``lacunaire'' ou ``oscillatoire''. Un des développements mathématiques du projet a consisté en la construction de formalismes multifractals adaptés à ces nouveaux exposants, à la compréhension des espaces fonctionnels sous-jacents, mais aussi à la construction de fonctions déterministes et de processus aléatoires présentant ce type de singularités sur des ensembles fractals dont on peut estimer la dimension de Hausdorff, de façon à pouvoir tester sur ces exemples la validité (tant théorique que numérique) des résultats obtenus. Une partie statistique (méthodes de bootstrap) a permis d'établir des barres d'erreurs pour les expérimentations numériques.

Sur le plan fondamental, un résultat majeur a été l'introduction de formalismes multifractals ``de seconde génération'' qui ne sont plus seulement bâtis sur des exposants de régularité, mais aussi des exposants d'autre nature [10, 11, 14, 20, 27]. Un autre aspect a été l'utilisation d'ondelettes anisotropes pour l'analyse multifractale de fonctions anisotropes [1, 2,13, 21]. Les applications les plus spectaculaires ont été d'en déduire de nouveaux outils de classification de signaux, appliquées à l'analyse du rythme cardiaque de fœtus [24,26,42] ou de papiers photographiques anciens [3,12,18, 25, 28]. Nous avons testé les résultats mathématiques obtenus sur toute une gamme d'applications (allant jusqu'à la classification d'œuvres d'art [4]). Une toolbox a été mise en oeuvre, cf :
https://www.irit.fr/~Herwig.Wendt/software.html
et elle contient les logiciels et la documentation correspondante.

C.2 ENJEUX ET PROBLEMATIQUE, ETAT DE L'ART

L'analyse multifractale a commencé à se développer à la fin des années 1980, sous l'impulsion initiale de U. Frisch et G. Parisi, qui ont interprété la non-linéarité de la fonction d'échelle de Kolmogorov comme un indicateur de la présence de singularités holderiennes de différentes intensité dans le signal étudié (il s'agissait initialement de signaux de vitesse d'écoulements turbulents, modélisés par des cascades multiplicatives [46]). Ensuite, A. Arneodo, E. Bacry et J. Muzy ont introduit des méthodes d'ondelettes (basées sur les maxima locaux de la transformée continue en ondelettes) afin d'estimer numériquement avec plus de précision les ``spectres de singularités'' ainsi obtenus (il s'agit des dimensions fractales des ensembles de points où le signal présente des singularités d'exposant donné). De nombreux modèles mathématiques de natures très diverses, et conduisant à des fonctions déterministes ou des processus aléatoires multifractals ont été introduits (séries de Davenport [43], processus de Lévy, séries aléatoires d'ondelettes [16, 17, 20],…). Ces exemples (de natures très différentes des cascades multiplicatives précédemment étudiées) ont montré la très grande variété des modèles multifractals possibles, mais aussi la limitation des formules introduites initialement pour le calcul des spectres multifractals. De plus, des résultats se rattachant à l'analyse fonctionnelle ont permis de mettre en évidence le caractère ``générique '' (au sens de Baire, ou de la prévalence) des fonctions multifractales [34, 35, 36, 45]. Un cadre général avait été proposé et exploré par P. Abry, S. Jaffard, et leurs collaborateurs afin de formuler le formalisme multifractal d'une façon qui allie rigueur mathématique et simplicité numérique [16,17]. Il était basé sur la construction de ``coefficients dominants'' qui sont des suprema locaux de coefficients d'ondelettes. Cependant, ce nouveau formalisme posait de nombreuses questions. Les plus importantes étaient :

-La concavité de l'estimation de spectre obtenue par transformée de Legendre, qui est une conséquence de la méthode, mais n'est pas nécessairement vérifiée par des modèles simples (juxtaposition de textures [44], processus de Lévy avec composante brownienne [19], …).

- L'hypothèse que les données sont localement bornées : cette hypothèse est très souvent passée sous silence, car considérée comme toujours vérifiée [23]. Cependant une méthode simple de régression log-log sur les suprema des coefficients d'ondelettes entre les échelles permet aisément de la vérifier, et nous avons eu la surprise de constater qu'elle n'est pas vérifiée pour des classes importantes de signaux et d'images naturelles.

-L'analyse en ondelettes ``classique'' ne permet pas de prendre en compte l'anisotropie de certaines images ; et on ne savait pas si les systèmes d'ondelettes ``alternatifs'' (ondelettes hyperboliques, ridgelets,…) permettaient une analyse de la régularité ponctuelles directionnelle, ni s'ils pouvaient être à la base de nouveaux formalismes multifractals [2].

-Dans le meilleur des cas, les formalismes utilisés ne permettaient pas de distinguer entre différentes types de singularités ponctuelles ayant le même exposant, mais avec des comportement plus ou moins oscillatoires au voisinage de la singularité (les ``chirps'' introduits et étudiés par Y. Meyer et B. Torrésani à la fin des années 1980) ; parfois même, ils fournissaient des résultats faux en présence de telles singularités. La présence de telles singularités étaient cependant conjecturée dans certains modèles.

C.3 RESULTATS OBTENUS

P. Abry, S. Jaffard, B. Vedel, S. Roux, H. Wendt ont montré comment les bases d'ondelettes hyperboliques - faites des produits tensoriels de deux ondelettes unidimensionnelles à des échelles dyadiques différentes - permettent d'analyser des textures anisotropes sans connaissance a priori sur l'anisotropie [1, 2, 13, 21]: Ils ont obtenus des caractérisations «

au log près » en terme d'espaces de Besov des ondelettes hyperboliques, permettant, d'une part de fournir une base universelle qui caractérise l'ensemble des espaces de Besov anisotropes, et d'autre part, de fournir un cadre général pour une analyse multifractale anisotrope. Ces résultats théoriques ont permis de construire des algorithmes de traitement d'image pour analyser des textures anisotropes. Elles ont été testées sur les « Operator Scaling Gaussian Random Fields » qui sont des champs gaussiens possédant une anisotropie donnée par une direction, un degré d'anisotropie et un exposant d'auto-similarité - qui caractérise aussi la régularité du champs. La routine développée permet d'estimer simultanément ces trois caractéristiques du champs. Ces méthodes ont ensuite été testées avec succès sur les textures anisotropes que sont les papiers photographiques anciens (début du 20eme siècle). Une difficulté supplémentaire dans ce cas est l'absence d'autosimilarité statistique. Les classifieurs obtenus (qui prennent en compte les comportements différents suivant les échelles) sont remarquablement efficaces, et ce travail a été l'objet d'une annonce spécifique de l'institut de Physique du CNRS, cf.
http://www.cnrs.fr/inp/spip.php?article2971
Nous avons également proposé des classes de champs aléatoires pour générer des textures anisotropes, et leur analyse.

Dans une suite de plusieurs articles, P. Abry, S. Jaffard, R. Leonarduzzi, C. Melot, S. Roux et H. Wendt ont développé une méthodologie pour calculer le p-exposant sur des signaux réels à l'aide des p-coefficients dominants (basés sur les coefficients en ondelettes du signal). Ils comparent la méthodologie MultiFractal Detrended Fluctuation Analysis au calcul du p-spectre multifractal calculé à l'aide des p-coefficients dominants, en montrant que la première calcule en fait des quantités multi-échelles liées aux 2-exposants. De nombreux exemples et simulations illustrent les énoncés et démonstrations théoriques (fonctions indicatrices de domaines, séries aléatoires ou déterministes d'ondelettes,…) [10, 11, 14, 20, 27]. Dans le cas des séries d'ondelettes lacunaires, ils ont montré que l'exposant de Hölder ponctuel de ces fonctions varie de point en point, et que leur p-exposant diffère en tous points de l'exposant de Hölder, en variant lui aussi de point en point. Ils ont calculé les dimensions des ensembles de points où les exposants ont une valeur fixée, réalisant ainsi une ``analyse multifractale grand-canonique'' des trajectoires de ces processus (on effectue une analyse conjointe des différentes exposants). Ils ont également défini de nouveaux exposants de ``deuxième génération'' (qui ne mesurent plus une régularité, comme cela avait toujours été le cas auparavant): Le premier est l'exposant de lacunarité [20] ; en effet une des raisons pour lesquelles les p-exposants différent de l'exposant de Hölder peut être que la fonction est très petite ``en moyenne'' sur une suite d'ensembles convergeant vers la singularité. On quantifie ce type de comportement à l'aide de ce nouvel exposant ponctuel, qui mesure la taille de cette zone où la fonction est très petite. Ils ont étudié un modèle de série d'ondelettes aléatoire où cet exposant est non trivial en presque tout point, et où on peut effectuer une analyse multifractale des valeurs qu'il prend. Le second exposant de ``deuxième génération'', l'exposant de cancellation, quantifie la possibilité d'avoir des singularités très oscillatoires (de la forme sin (1/x)) qui elles-aussi produisent un comportement non trivial lors d'une intégration fractionnaire (l'accroissement de l'exposant est strictement plus grand que l'ordre d'intégration) [14]. Ces deux exposants, celui de lacunarité et celui de cancellation, permettent d'extraire une information cruciale sur les exposants de régularité les plus généraux (p-exposants d'intégrées fractionnaires du signal). On a étudié des modèles de séries d'ondelettes multifractales et montré que les deux exposants, celui de lacunarité et celui de cancellation, peuvent être simultanément non nuls. Une illustration originale de ces concepts a été obtenue par Clothilde Melot (en collaboration avec Mourad Ben Slimane) qui a étudié la fonction de Knopp-Van der Werden [37]. Cette fonction a en tous points un exposant de Hölder ponctuel constant et également un p-exposant constant qui lui est égal. Si on considère le graphe de cette fonction et la fonction indicatrice du domaine sous le graphe, l'exposant de Hölder de la fonction indicatrice du domaine aux points du graphe vaut toujours 0. Par contre son p-exposant varie de point en point. Il permet dans ce cas de préciser la géométrie du graphe. De plus l'exemple de cette fonction indicatrice est un exemple simple où le p-exposant et l'exposant de Hölder diffèrent en certains points du graphe.

P. Abry, S. Jaffard, R. Leonarduzzi, H. Wendt se sont intéressé au problème de la mise en évidence numérique de spectres multifractals non-concaves [17,19] . Ils ont étudié particulièrement une méthode qui permet de s'affranchir de la contrainte de concavité due au calcul de la transformée de Legendre : il s'agit d'estimer numériquement l'enveloppe croissante puis décroissante (et non plus concave) du spectre de grande déviation (dont le calcul directe est numériquement impossible du fait de la double limite qui apparaît dans sa définition, cf. [33] pour des résultats mathématiques sur sa définition). Ils ont montré la pertinence de cette approche sur quelques exemples ``classiques'' de fonctions dont le spectre est non-concave : Fonction de Riemann et processus de Lévy avec composante brownienne.

Avec F. Bayart, Y. Heurteaux s'est intéressé aux vitesses de divergences des sommes partielles des séries de Fourier [34,35]. Génériquement, il a mis en évidence un continuum de vitesses de divergences possibles et calculé les dimensions de Hausdorff de chacun des ensembles ainsi décrits, montrant ainsi que le comportement asymptotique des séries de Fourier est génériquement de nature multifractale. La généricité peut s'entendre au sens de Baire ou au sens de la prévalence. Ils ont traité de façon similaire le comportement au bord des fonctions harmoniques de la boule en dimension d [36], mettant là encore en évidence un comportement générique multifractal. Ils ont également développé un cadre général qui unifie les contextes des séries de Fourier et des fonctions harmoniques, ainsi que d'autres comme par exemple le contexte historique de la régularité holderienne. Avec A. Stos, Y. Heurteaux a étudié le modèle des mesures générées à l'aide de chaines de Markov, qui constituent une généralisation naturelle des produits de Bernoulli [40]. A l'aide d'outils élémentaires, et en utilisant l'approche de la construction de mesures auxiliaires, ils ont établi établis la validité du formalisme multifractal, calculé la dimension des mesures, et montré l'unicité des mesures de dimension maximale.

La turbulence des fluides est à l'origine des mathématiques de l'analyse multifractale et en est toujours une application traditionnelle. Dans le cadre d'une description spatiale, les travaux fondateurs de Benoît Mandelbrot et Jean-Pierre Kahane, permettent de donner une description stochastique réaliste et statistiquement homogène du champ (scalaire) de la dissipation. De tels champs aléatoires consistent en l'exponentiation de champs gaussiens dont la structure de covariance est logarithmique. De nombreux travaux théoriques ont permis de donner un sens mathématique à ces champs distributionnels, typiquement en définissant une version régularisée à une petite échelle et en prenant ensuite la limite. Néanmoins, la dissipation n'est qu'une caractérisation très partielle des fluctuations de vitesse turbulente, et on souhaiterait disposer d'un champ aléatoire modélisant le champ de vecteurs vitesse, et/ou une de ses composantes. Pour cela, Laurent Chevillard a étudié théoriquement et numériquement les fluctuations de vitesse d'un modèle aléatoire qui se propose de perturber un champ de vecteurs gaussien fractionnaire par un chaos multiplicatif matriciel [41, 47]. Ce modèle s'inspire des équations d'Euler. Il montre la nécessité de prendre en compte des corrélations non triviales entre le chaos de matrices, et la mesure gaussienne sous-jacente du champ brownien. Il a montré comment effectuer des simulations numériques à très hautes résolutions afin de s'assurer du réalisme de ces champs. En particulier, il a montré l'existence d'une asymétrie des densités de probabilité des incréments comme prédite par Kolmogorov à partir des équations de Navier-Stokes. De plus, il a développé une approche rigoureuse d'ersatz de ces champs qui permet de comprendre l'origine de la multifractalité et des asymétries. Il a également construit une version uni-dimensionnelle de ce champ de vecteurs. C'est la première proposition rigoureuse d'un champ aléatoire multifractal et asymétrique, cohérent avec l'approche axiomatique de Kolmogorov pour la turbulence.

Antoine Ayache a mis en évidence des propriétés importantes des champs harmonisables fractionnaires stables (hfsf) [31,32]: le fait qu'il sont toujours localement non-déterministes ce qui résout une conjecture de Nolan (1989), et permet d'obtenir la continuité jointe du temps local du hfsf. Il a de plus amélioré des résultats de Stoev and Taqqu sur le comportement des trajectoires du mouvement linéaire multifractionnaire stable (lmsm), résolvant entre autres des conjectures de ces auteurs. Il a de plus calculé les modules de continuité exacts du lmsm. Ce résultats forme un pendant dans le domaine fréquentiel des travaux antérieurs de Ayache, Roueff and Xiao dans le domaine spatial. Il a aussi construit des estimateurs statistiques de l'exposant de Hurst du lmsm [30], dont les propriétés de robustesse remarquables, devraient en faire un outil statistique de référence dans ce domaine. Il a également montré que la queue des distributions multi-stables se comporte en loi de puissance ; ce résultat devrait avoir une incidence importante pour l'analyse par ondelettes des processus aléatoires multi-stables (processus dont l'indice de stabilité n'est pas constant mais varie en espace). A. Ayache a également construit des processus gaussiens dont l'exposant de Hölder est aléatoire [29].

C.4 Exploitation des resultats

Les résultats obtenus dans ce projet ont déjà trouvé des applications en dehors des domaines prévus dans le projet initial. Ainsi, ils nous ont permis de lancer une collaboration avec des linguistes concernant l'analyse multifractale de textes littéraires (ce projet a été soutenu par un PEPS sur l'Université Paris Est). Ils seront également exploités dans un autre projet ANR, qui rassemble quelques membres du projet AMATIS ainsi que des chercheurs du CEA (Neuro-spin) et qui concernera l'analyse multifractale de signaux neuronaux. De plus, les travaux de Yanick Heurteaux et Frédéric Bayart sur l'analyse multifractale de la divergence des séries de Fourier ont trouvé une extension inattendue concernant le même problème pour les séries d'Ondelettes (travail récent de C. Esser et S. Jaffard). Un autre PEPS sur Paris Est a été lancé entre les mathématiciens de l'UPEC et une équipe de Bio-mécanique (du Laboratoire MSME) ; il concerne l'analyse de signaux électriques utilisés pour vérifier la stabilité des implants dentaires : les résultats préliminaires montrent que des paramètres multiéchelles (semblables à ceux déjà utilisé pour la classification de papiers photographiques) permet une classification pertinente de ces signaux en fonction du degré de fragilité de l'implant [48].

C.5 Discussion

La plupart des objectifs initiaux ont été atteints, et certains dépassés. Parmi les verrous qui persistent, on peut citer :

La construction d'un formalisme multifractal adapté aux singularités anisotropes. La difficulté provient de la beaucoup trop grande généralité de singularités anisotropes envisageables. Il paraîtrait raisonnable de se concentrer sur certains types de singularités spécifiques , et le choix devrait être dicté par les applications potentielles (déterminer les ``sous-classes'' qui, en pratiquent se rencontrent le plus souvent en traitement d'images). De ce point de vue, le travail effectué sur les papiers photos pourrait permettre de sélectionner certains modèles pertinents dans les applications.

La nouvelle classification très fine des singularités ponctuelles obtenue au moyen de trois exposants (exposants de régularité, lacunarité et d'oscillation) pose encore des problèmes de stabilité numérique. Grosso-modo, on peut dire que la mise on œuvre des formalismes mutifractals correspondants permet de répondre à la question (importante) de savoir si des singularités lacunaires ou oscillantes sont présentes dans les données (ce qui permet de valider ou d'infirmer des modèles), mais ne permet pas d'exprimer leur dimension avec précision. Il y a là une marge d'amélioration importante, qui pourrait être la conséquence d'autres formulations de formalismes grand-canoniques, qu'il faudrait mettre au point. On a de plus observé une forte disparité sur les deux nouveaux types de singularité (cancellantes vs. lacunaires). En effet, si de nombreux modèles probabilistes présentent de singularités lacunaires, en revanche, ceux présentant des singularités cancellantes sont rares et très ``ad hoc''. Une question importante est donc de savoir si de telles singularités se présentent effectivement dans des données expérimentales (nous n'en avons pas encore mis en évidence) et dans des trajectoires de processus aléatoires ``standard'' (à notre connaissance, de telles singularités n'ont pas été mises en évidence jusqu'à présent).

C.6 Conclusions

Les objectifs du projet initial ont été atteints (et parfois dépassés) et ont fait l'objet d'un nombre important de publications, de communications à des congrès et d'un logiciel.

C.7 References

Cf. liste des publications ci-dessous.

D Liste des livrables

Quand le projet en comporte, reproduire ici le tableau des livrables fourni au début du projet. Mentionner l'ensemble des livrables, y compris les éventuels livrables abandonnés, et ceux non prévus dans la liste initiale.

Date de livraison	**N°**	**Titre**	**Nature** (rapport, logiciel, prototype, données, …)	**Partenaires** (souligner le responsable)	**Commentaires**

E Impact du projet

E.1 Indicateurs d'impact

Nombre de publications et de communications (à détailler en E.2)

		Publications multipartenaires	**Publications monopartenaires**

International	Revues à comité de lecture	13	14
	Ouvrages ou chapitres d'ouvrage	4	2
	Communications (conférence)	8	4
France	Revues à comité de lecture		
	Ouvrages ou chapitres d'ouvrage		
	Communications (conférence)	2	1
Actions de diffusion	Articles vulgarisation	4	
	Conférences vulgarisation	3	
	Autres	Sept-oct 2015 : poster dans la fresque géante ``le couloir du temps'' (CNRS + RATP à la station de métro Montparnasse)	

Autres valorisations scientifiques (à détailler en E.3)

	Nombre, années et commentaires (valorisations avérées ou probables)
Brevets internationaux obtenus	non
Brevet internationaux en cours d'obtention	Non
Brevets nationaux obtenus	non
Brevet nationaux en cours d'obtention	non
Licences d'exploitation (obtention / cession)	non
Créations d'entreprises ou essaimage	non
Nouveaux projets collaboratifs	Projet ANR Multifracs (obtenu en 2016)
Colloques scientifiques	Les membres du projet ont exposé les résultats obtenus au sein du projet chaque année dans une quinzaine de conférences.
Autres (préciser)	

E.2 LISTE DES PUBLICATIONS ET COMMUNICATIONS

Articles dans des revues internationales incluant au moins deux groupes distincts du projet

[1] P. Abry, M. Clausel, S. Jaffard, S.G. Roux, and B. Vedel : *The hyperbolic wavelet transform: an efficient tool for multifractal analysis of anisotropic textures.* Revista Matemática Iberoamericana, 1:1--36, 2015.

[2] P. Abry, M. Clausel, S. Jaffard, S. G. Roux and B. Vedel : Hyperbolic wavelet transform: an efficient tool for multifractal analysis of anisotropic textures Revista Matematica Iberoamericana, Vol. 31 N. 1 pp. 313--348, 2015

[3] P. Abry, S. G. Roux, H. Wendt, P. Messier, A. G. Klein, N. Tremblay, P. Borgnat, S. Jaffard, B.Vedel, J. Coddington, and L. Daffner : Multiscale Anisotropic Texture Analysis and Classification of

Photographic Prints: Art scholarship meets image processing algorithms, IEEE Signal Processing Magazine vol. 32, no. 4, pp. 18-27, July 2015

[4] P. Abry, H. Wendt, S. Jaffard, When Van Gogh meets Mandelbrot: Multifractal Classification of Painting's Texture Signal Processing Vol 93 n. 3 mars 2013 pp. 554-572

[5] A. Ayache, J. Hamonier ; Behaviour of linear multifractional stable motion: membership of a critical Holder space. A par. Dans Stochastics

[6] A. Ayache, J. Hamonier; Uniformly and strongly consistent estimation for the Hurst function of a linear multifractional stable motion. A par. Dans Bernoulli

[7] A. Ayache, J. Hamonier; Linear mutifractional stable motion: wavelet estimation of H(·) and α parameters. Lithuanian Mathematical Journal 55: 2: 159–192 (2015).

[8] A. Ayache, J. Hamonier; Linear multifractional stable motion: fine path properties. Revista Matematica Iberoamericana 30: 4: 1301–1354 (2014).

[9] A. Ayache, J. Hamonier; Linear fractional stable motion: a wavelet estimator of the α parameter. Statistics and Probability Letters 82: 8: 1569–1575 (2012).

[10] S. Jaffard, C. Melot, R. Leonarduzzi, H. Wendt, P. Abry, S. G. Roux, M. E. Torres : p-exponent and p-Leaders - Part I: Negative pointwise regularity Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, vol. 448, pp. 300-318, 2016

[11] R. Leonarduzzi, H. Wendt, P. Abry, S. Jaffard, C. Melot, S. G. Roux, M. E. Torres : p-exponent and p-Leaders - Part II: Multifractal Analysis. Relations to Detrended Fluctuation Analysis Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, vol. 448, pp. 319-339, 2016

[12] P. Messier, C. R. Johnson, W. A. Sethares, A. G. Klein , C. Brown, A. H. Do, P. Klausmeyer, P. Abry, S. Jaffard, H. Wendt, S. Roux, N. Pustelnik, N. van Noord, L. van der Maaten, E. Postma, J. Coddington, L. A. Daffner, H. Murata, H. Wilhelm, S. Wood, M. Messier : Pursuing automated classification of historic photographic papers from raking light photomicrographs Journal of the American Institute for Conservation, vol. 53, no. 3, pp. 159-170, 2014.

[13] S. G. Roux, M. Clausel, B. Vedel, S. Jaffard, and P. Abry : *Self-similar anisotropic texture analysis: the hyperbolic wavelet transform contribution.* Transaction on Image Processing, 22(11) pp 4353 -- 4363, 2013.

Autres publications (conférences invitées et chapitres d'ouvrage) incluant au moins deux groupes distincts du projet

[14] P. Abry, S. Jaffard, R. Leonarduzzi, C. Melot, H. Wendt : *New exponents for pointwise singularities classification* in Proc. Fractals and Related Fields III, 19-26 September 2015, Porquerolles, France, S. Seuret and J. Barral, Eds., 2016.

[15] P. Abry, S . Jaffard R. Leonarduzzi, C. Melot, H. Wendt : Multifractal analysis based on p-exponents and lacunarity exponents, in Fractal Geometry And Stochastics V, vol. 70 p. 279-313,2016

[16] P. Abry, S. Jaffard, H. Wendt : Irregularities and scaling in signal and Image processing: Multifractal analysis, "Benoit Mandelbrot: A Life in Many Dimensions" World Scientific M. Frame Ed., pp. 31–116, 2015

[17] P. Abry, S. Jaffard, H. Wendt : A bridge between geometric measure theory and signal processing: Multifractal analysis Operator-related function theory and time-frequency analysis, Proceedings of the Abel Symposium 2012, Oslo pp. 1–56 Springer 2015

[18] P. Abry, A. G. Klein, P. Messier, M. H. Ellis, W. A. Sethares, D. Picard, Y. Zhai, D. L. Neuhoff, S. Roux, S. Jaffard, H. Wendt, C. R. Johnson, Jr. : Applying Measures of Texture Similarity to Wove Paper , Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, 2016

[19] R. Leonarduzzi, H. Touchette, H. Wendt, P. Abry, S. Jaffard : Generalized Legendre Transform Multifractal Formalism for Nonconcave Spectrum Estimation 2016 IEEE Statistical Signal Processing Workshop (SSP), Palma de Mallorca, June 26-29, 2016

[20] S. Jaffard, P. Abry, C. Melot, R. Leonarduzzi, H. Wendt : Multifractal analysis based on p-exponents and lacunarity exponents Fractal Geometry and Sochastics V, Birkhauser, Progress in Probability Vol. 70, pp. 279–313 2015

[21] S. G. Roux, P. Abry, B. Vedel, S. Jaffard, H. Wendt : Hyperbolic wavelet leaders for anisotropic multifractal texture analysis ICIP 2016

[22] G. Roux, B. Vedel, S. Jaffard, and P. Abry : *Coefficients dominants de la transformé hyperbolique en ondelettes 2d: Application à l'analyse de textures invariantes d'échelle, multifractales et anisotropes. P*roc. XXIV GRETSI, Brest, France, 2013.

[23] R. Leonarduzzi, H. Wendt, S. Jaffard, P. Abry : Pitfall in Multifractal Analysis of Negative Regularity, GRETSI Symposium Signal and Image Processing, Lyon, France, Sept. 2015

[24] R. Leonarduzzi, J. Spilka, J. Frecon, H. Wendt, N. Pustelnik, S. Jaffard, P. Abry, M. Doret : p-leader Multifractal Analysis and Sparse SVM for Intrapartum Fetal Acidosis Detection, Proc. 37th International IEEE EMBS Conference, Milano, Italy, Aug. 2015

[25] S. Roux, P. Abry, H. Wendt, S. Jaffard : Hyperbolic Wavelet Transform for Historic Photographic Paper Classification Challenge Proc. IEEE Asilomar Conf. Signals, Sys- tems and Computers, Pacific Grove, USA, Nov. 2014

[26] R. Leonarduzzi, J. Spilka, H. Wendt, S. Jaffard, M. E. Torres, P. Abry, M. Doret : p-leader based classification of first stage intrapartum fetal HRV, IFMBE Proc. Vol. 49, 2015, pp. 504-507, 2014

[27] R. Leonarduzzi, H. Wendt, S. Jaffard, S.G. Roux, M.E. Torres, P. Abry : Extending multifractal analysis to negative regularity: p-exponents and p-leaders IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, and Signal Proces. (ICASSP), Florence, Italy, May 2014

[28] P. Messier, C. R. Johnson, H. Wilhelm, W. A. Sethares, A. G. Klein, P. Abry, S. Jaffard, H. Wendt, S. Roux, N. Pustelnik, N. van Noord, L. van der Maaten, and E. Postma : Automated surface texture classification of inkjet and photographic media, Society for Imaging Science and Technology (IS & T), 29th International Conference on Digital Printing Technologies/Digital Fabrication, Seattle, WA, Sep 29-Oct 3, 2013.

Autres articles dans des revues internationales incluant un seul groupe du projet

[29] A. Ayache : Continuous Gaussian multifractional processes with random pointwise Holder regularity. Journal of Theoretical Probability 26: 1: 72–93 (2013).

[30] A. Ayache ; Sharp estimates on the tail behavior of a multistable distribution. Statistics and Probability Letters 83: 3: 680–688 (2013).

[31] A. Ayache , G. Boutard ; Stationary increments harmonizable stable fields: upper estimates on path behaviour. Journal of Theoretical Probability to appear.

[32] A. Ayache , Y. Xiao ; Hamonizable fractional stable fields: local nondeterminism and joint

continuity of the local times. Stochastic Processes and their Applications 126: 1: 171–185 (2016).

[33] F. Bastin, C. Esser, S. Jaffard : Large deviation spectra based on wavelet leaders, Revista Matematica Iberoamericana Vol. 32 pp. 859-890, 2016

[34] F. Bayart, Y. Heurteaux: Multifractal analysis of the divergence of Fourier series. Annales Scientifiques de l'ENS. , 45 : 927-946, 2012.

[35] F. Bayart, Y. Heurteaux: Multifractal analysis of the divergence of Fourier series: the extreme cases, Journal d'Analyse Mathématique. à paraître.

[36] F. Bayart, Y. Heurteaux : Boundary multifractal behaviour for harmonic functions in the ball, Potential Analysis. , 38 : 499-514, 2013.

[37] M. Ben Slimane, C. Melot : Analysis of a fractal boundary: the graph of the Knopp function » Abstract And Applied Analysis, 2015

[38] C. Coiffar, C. Melot, T. Willer, A family of functions with two different spectra of singularities, Journal of Fourier Analysis And Applications, vol. 20 p.961-984, 2014

[39] G. Didier, S. Jaffard, V. Pipiras : On the vaguelet and Riesz properties of L2-unbounded transformations of orthogonal wavelet bases, Journal of Approximation Theory, Vol. 176, pp. 94–117 2013

[40] Y. Heurteaux, A. Stos : On measures driven by Markov chains, Journal of Statistical Physics. , 157 : 1046-1041, 2014.

[41] R.M. Pereira, C. Garban, L. Chevillard : *A dissipative random velocity field for fully developed fluid turbulence,* J. Fluid Mech. 794, 369 (2016).

[42] J. Spilka, J. Frecon, R. Leonarduzzi, N. Pustelnik, P. Abry, and M. Doret. Sparse support vector machine for intrapartum fetal heart rate classifica- tion. IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics, PP(99):1–1, 2016.

Autres publications (conférences invitées et chapitres d'ouvrage) incluant un seul groupe du projet

[43] A. Durand, S. Jaffard: Multivariate Davenport series, "Further Developments in Fractals and Related Fields" J. Barral and S. Seuret Eds., Springer pp. 63-113, 2013

[44] J. Barral, A. Durand, S. Jaffard, S. Seuret, Local multifractal analysis "Applications of Fractals and Dynamical Systems in Science and Economics", AMS, Contempory Mathematics, edited by D. Carfi, M. L. Lapidus, E. J. Pearse, and M. van Frankenhuijsen, 2013

[45] F. Bayart, Y. Heurteaux: On the Hausdorff dimension of graphs of prevalent continuous functions on compact sets. Further Developments in Fractals and Related Fields, J. Barral, S. Seuret (Eds) Birkäuser ; 25-34, 2013

[46] Y. Heurteaux : An introduction to Mandelbrot cascades. New Trends in Applied Harmonic Analysis, A. Aldroubi, C. Cabrelli, S. Jaffard, U. Molter (Eds), Birkäuser ; 67-105, 2016

[47] S. G. Roux, R. M. Pereira, L. Chevillard, P. Abry : Analyse multifractale de champs vectoriels aléatoires 3D : application à la turbulence des fluides, Actes de colloque GRETSI XXV 2015

[48] G. Rosi, I. Scala, V. H. Nguyen, S. Naili, R. Vayron, G. Haiat, H. Yahia, S. Seuret et S. Jaffard, Caractérisation de la Réponse Ultrasonore d'Implant Dentaire : Simulation Numérique et Analyse des Signaux CFA Vishno 2016

[49] J. Spilka, V. Chudacek, M. Huptych, R. Leonarduzzi, P. Abry, and M. Doret. Intrapartum Fetal Heart Rate Classification: Cross-Database Evaluation. In XIV Mediterranean Conference on Medical and Biological Engineering and Computing: MEDICON 2016, 2016. to appear.

E.3 LISTE DES ELEMENTS DE VALORISATION

Nous avons présenté les résultats obtenus au sein du projet à de nombreux colloques internationaux, tant en mathématiques, qu'en traitement du signal et d'image (cf. les proceedings mentionnés dans les publications, mais aussi le colloque ``fractal and related fields'' (tous les 4 ans), où les membres du projet ont effectué plusieurs exposées). De plus, les principaux résultats obtenus en traitement d'image ont été présentés au congrès SIAM Imaging 2016.

Le financement attaché au projet nous a permis de prendre en charge chaque année une dizaine de missions afin que des membres du projet de se travailler ensemble. De plus, nous avons co-financé de petits colloques (de 1 à 2 par ans) réunissant entre 15 et 30 personnes, autour des thématiques du projet : ces réunions comprenaient une partie mini-cours, donnée par des membres extérieurs au projet, et qui nous permettait d'élargir les thématiques abordées ; elles étaient aussi l'occasion de discussions avec des chercheurs thématiquement proches, et de comparer nos résultats avec les leurs.

Une toolbox a été développée au sein du projet, cf :
https://www.irit.fr/~Herwig.Wendt/software.html
cette page web contient les logiciels et la documentation correspondante.

Un partenariat avec le CEA (équipe Neuro-spin) entamé pendant la durée du projet à débouché sur un nouveau projet ANR, où certains membres d'AMATIS étudieront, en collaboration avec les membres de Neuro-spin, sur l'analyse multifractale et multivariée (on prend en compte simultanément plusieurs signaux de nature éventuellement différente pour faire leur analyse multifractale conjointe) de signaux neuronaux.