TD M1

# Evaluation d'actifs financier
# et
# Arbitrage

Université Paris-Dauphine

## Arbitrage

### Exercice 1 : Payoffs et stratégies

Donner et tracer les payoffs à maturité des stratégies suivantes. Interprétez l'utilisation de chaque stratégie :

1. **Straddle:** Achat d'un Call et d'un Put de même Strike $K$ et de même échéance $T$.
2. **???:** Vente d'une action et achat de deux Calls de prix d'exercice $K$. Quel nom lui donneriez vous?
3. **Strangle:** Achat d'un Call et d'un Put de même échéance et de strike différent.
4. **Strip:** Achat d'un Call et de deux Puts de même échéance et de même strike $K$.
5. **Strap:** Achat de deux Calls et d'un Put de même échéance et de même strike $K$.
6. **Bull Spread:** Achat d'un Call de strike $K_1$ et vente d'un Call de strike $K_2 > K_1$ de même échéance.
7. **Bear Spread:** Achat d'un Put de strike $K_1$ et vente d'un Put de strike $K_2 > K_1$ de même échéance.
8. **Butterfly:** Achat de deux Calls de strikes $K + \delta K$ et $K - \delta K$ et vente de deux Calls de strike $K$.
9. **Condor:** Achat de deux Calls de strikes $K_1$ et $K_4 > K_1$, vente de deux Calls de strikes $K_2 = K_1 + \delta K$ et $K_3 = K_4 - \delta K$ avec $K_1 < K_2 < K_3 < K_4$.

**Exercice 2 : Prix de call et de put**

On suppose qu'il y a absence d'opportunité d'arbitrage sur le marché (AOA). On note $B_0$ le prix en 0 de l'actif sans risque rapportant 1 à la date $T$. On note de même $C_0$ et $P_0$ les prix en 0 d'un call et d'un put sur le sous jacent $S$ de maturité $T$ et de strike $K$.

**1.** Montrer par un raisonnement d'arbitrage que:

$$(S_0 - K\,B_0)^+ \leq C_0 \leq S_0$$

**2.** En déduire:

$$(K\,B_0 - S_0)^+ \leq P_0 \leq K\,B_0$$

**3.** Montrer que le prix du call est décroissant par rapport au strike mais croissant par rapport à la maturité.

**4.** Qu'en est-t-il du prix du put ?

**Exercice 3 : Option Américaine**

**1.** Montrer qu'une option Américaine est plus chère qu'une option Européenne.

**2.** Soit $t \in [0, T[$ et $S_t$ le prix de l'actif $S$ à cet instant. On suppose que $P(S_T < K) > 0$ et $P(S_T > K) > 0$. Soit $B_t$ le prix de l'actif sans risque rapportant 1 à la date de maturité. Soit $C_t^e$ le prix d'un call Européen acheté en $t$ de prix d'exercice $K$ et de maturité $T$. Montrer que $C_t^e > max(0, S_t - KB_t)$.

**3.** Montrer qu'à tout instant, il vaut mieux vendre un call américain à son prix de marché que de l'exercer.

**4.** En déduire qu'un call Américain a la même valeur qu'un call Européen.

**Exercice 4 : Contrat forward sur devise**

On étudie sur l'intervalle de temps $[0, T]$ le marché de devises entre l'euro et le dollar américain. Ce marché peut être schématisé de la manière suivante:

1. Dans l'économie européenne, il existe un actif sans risque domestique de taux d'intérêt continu $r_d$. Son prix est normalisé en $T$ et vaut donc $B_t^d = e^{-r_d(T-t)}€$ pour tout $t \in [0, T]$.
2. Dans l'économie américaine, il existe aussi un actif sans risque, de taux d'intérêt continu $r_f$. Son prix, exprimé en dollars, est normalisé en $T$ et vaut donc $B_t^f = e^{-r_f(T-t)}$ \$ pour tout $t \in [0, T]$.
3. Pour obtenir 1 dollar, il faut débourser $S_t$ euros à la date $t$.
4. Enfin, sur le marché il existe des contrats forwards pour toute date $t \in [0, T]$. Un contrat forward contracté à la date $t$ est déterminé par l'échange de flux suivant:
   - Aucun échange de flux à la date d'entrée $t$ dans le contrat.
   - A l'échéance $T$, on reçoit 1 \$ contre $F_t$ €, montant fixé à la date d'entrée $t$ du contrat.

**1.** Soit $t \in [0, T]$. Donner le pay-off à la date $T$, en euros, en fonction de la valeur du taux de change $S_T$, des portefeuilles suivants, constitué à la date $t$

(1) Achat de $B_t^f$ dollars. Ce montant est alors placé dans l'actif sans risque de l'économie américaine.
Emprunt de $F_t B_t^d$ euros (grâce à l'actif sans risque **domestique**).

(2) Contrat forward contracté à l'instant $t$.

En déduire, par un raisonnement d'arbitrage, le prix $F_t$ en fonction de la valeur du taux de change $S_t$ à l'instant $t$.

**2.** Donner le pay-off en euros à la date $T$ du portefeuille constitué à partir d'un contrat de prix forward $F_0$ et de la vente à découvert à la date $t$ du contrat de prix forward $F_t$. En déduire par un raisonnement d'arbitrage, la valeur en euro $f_t^0$ à la date $t$ du contrat forward contracté en 0 en fonction de $F_t$ et $F_0$, puis en fonction de $S_t$ et $S_0$.

## Arbres

**Exercice 5 : Arbre binomial à une période**

On considère un marché à 2 dates avec un actif risqué et un actif sans risque de dynamique:

$$\text{Actif sans risque: } 100 \quad \rightarrow \quad 105 \qquad\qquad \text{Actif risqué: } 100 \begin{array}{l} \nearrow \; 120 \\ \\ \searrow \; 90 \end{array}$$

L'actif risqué a une probabilité 0.75 de monter et 0.25 de descendre.

**1.** Décrire $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

**2.** Donner la définition de la probabilité risque neutre. La calculer.

**3.** Calculer le prix d'un call et d'un put de strike 100.

**4.** Retrouver la relation de parité call put.

**Exercice 6 : Option lookback en modèle binomial à deux périodes**

On se place dans le cadre d'un modèle binomial à trois dates: $t = 0$, $t = 1$ et $t = 2$ avec $r = 0.05$, $u = 1.1$ et $d = 0.95$ et $S_0 = 100$.

**1.** Représentez l'arbre d'évolution de l'actif risqué.

**2.** Décrire $\Omega$, $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.

**3.** Déterminez la probabilité risque neutre.

**4.** Quel est le prix d'un call de strike 105 d'échéance $T = 2$ ?

**5.** Déterminez le prix d'une option lookback de payoff final:

$$(S_2^* - 100)^+ \qquad\qquad \text{avec } S_t^* = Sup_{s \leq t}\, S_s$$

**Exercice 7 : Convergence du modèle Binomial vers le modèle de Black Scholes**

Considérons un marché financier, constitué d'un actif sans risque $R$ normalisé en $t = 0$ et d'un actif risqué $S$, ouvert sur la période de temps $[0, T]$.

Divisons l'intervalle de temps $[0, T]$ en $n$ intervalles $[t_i^n, t_{i+1}^n]$ avec $t_i^n := \frac{iT}{n}$ et plaçons nous dans le cadre d'un modèle binomial à $n$ périodes. Notons $r_n$ le taux d'intéret de l'actif sans risque, la valeur $R_t^n$ de l'actif sans risque aux instants $t = t_i^n$ est alors donnée par:

$$R_{t_i^n}^n \quad = \quad (1 + r_n)^i$$

On note $X_i^n$ le rendement de l'actif risqué entre les instants $t_{i-1}^n$ et $t_i^n$. On a alors sous la probabilité historique $\mathbb{P}^n$:

$$\mathbb{P}(X_i^n = u_n) = p_n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_i^n = d_n) = 1 - p_n$$

On rappelle que le vecteur $(X_1^n, \ldots, X_n^n)$ est un vecteur de variables aléatoires indépendantes.

Soit $r$ et $\sigma$ deux constantes positives, $r_n$, $d_n$ et $u_n$ ont la forme suivante:

$$r_n \;=\; \frac{rT}{n} \qquad\qquad d_n \;=\; \left(1 + \frac{rT}{n}\right) e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} \qquad\qquad u_n \;=\; \left(1 + \frac{rT}{n}\right) e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}$$

**1.** Représentez l'arbre d'évolution de l'actif risqué dans le modèle.

**2.** Montrez que $R_T^n$ converge vers $e^{rT}$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

**3.** Le marché vérifie t'il l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage?

**4.** Exprimez la valeur $S_{t_i^n}^n$ de l'actif risqué en $t_i^n$ en fonction de $S_0$ et de $(X_1, \ldots, X_i)$.

**5.** Donnez la dynamique du processus $X^n$ sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}_n$.
La probabilité $\mathbb{Q}_n(X_i^n = u_n)$ sera notée $q_n$ dans la suite.

**6.** Vérifiez que l'on a:

$$q_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \qquad\qquad n\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}[ln(X_1^n)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \qquad\qquad n\,Var_{\mathbb{Q}^n}[ln(X_1^n)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma^2\, T$$

**7.** Montrez à l'aide des fonctions caractéristiques la convergence en loi suivante:

$$\sum_{i=1}^{n} ln X_i^n \quad \underset{n\to\infty}{\overset{loi}{\longrightarrow}} \quad \mathcal{N}\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T, \sigma^2\, T\right] .$$

**8.** En déduire que:

$$S_T^n \quad \underset{n\to\infty}{\overset{loi}{\longrightarrow}} \quad S_0\, e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T \,+\, \sigma\, W_T} \qquad\qquad \text{avec } W_T \sim \mathcal{N}(0, T)$$

La dynamique de la limite est, comme vous le verrez, celle que l'on supposera dans le modèle de Black & Scholes.

**9.** Ecrire sous forme d'espérance le prix d'un put de strike $K$ et de maturité $T$ dans le modèle binomial à $n$ périodes.

**10.** En déduire que le prix du put converge lorsque $n$ tend vers l'infini vers:

$$P_0 \quad := \quad K\, e^{-rT}\, \mathcal{N}(-d_2) \; - \; S_0 \mathcal{N}(-d_1)$$

Avec $\mathcal{N}$ la fonction de répartition d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, $d_1$ et $d_2$ donnés par:

$$d_1 \; := \; \frac{ln(\frac{S_0}{K}) \, + \, (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad \text{et} \qquad d_2 \; := \; d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

**11.** Conclure en obtenant la formule de Black & Scholes donnant le prix du call:

$$C_0 \quad := \quad S_0 \mathcal{N}(d_1) \; - \; K\, e^{-rT} \mathcal{N}(d_2)$$

**Exercice 8 : Duplication d'un produit dérivé en modèle binomial à n périodes**

Suivre la démonstration distribuée en cours sur ce sujet.

## Martingales

### Exercice 9 : Tranformée de Martingale

Soit $(S_i)_{i\leq n}$ une $\mathbb{F}$-martingale et $(H_i)_{i\leq n}$ un processus discret borné $\mathcal{F}$-adapté. On définit le processus $(M_i)_{i\leq n}$ par:

$$M_i \quad := \quad \sum_{j=1}^{i} H_{j-1}\left(S_j - S_{j-1}\right)$$

**1.** Montrez que le processus $P$ est également une $\mathbb{F}$-martingale.

**2.** Dans un modèle binomial à $n$ périodes, si l'actif risqué réactualisé est martingale sous la probabilité risque neutre, qu'en déduire sur les stratégies autofinancantes de portefeuille simples ?

### Exercice 10 : Martingales de carré intégrable

Soit $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ une $\mathcal{F}$-martingale de carré intégrable, i.e. telle que pour tout $t$, $\mathbb{E}[M_t^2] < \infty$

**1.** Montrez que, pour $s \leq t$, on a:

$$\mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2/\mathcal{F}_s] \quad = \quad \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2/\mathcal{F}_s]$$

**2.** En déduire que $M_t^2$ est une $\mathcal{F}$-sousmartingale. Aurait on pu obtenir ce résultat plus rapidement?

### Exercice 11 : Limite $\mathcal{L}^2$ de variables aléatoires Gaussiennes

Soit $X_n$ une suite de variables aléatoires réelles admettant pour lois respectives les lois normales $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$.
Montrer que si $X_n$ converge dans $\mathcal{L}^2$ vers $X$, alors $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m$ et $\sigma^2$ les limites respectives des suites $m_n$ et $\sigma_n$.

## Mouvement Brownien

**Exercice 12 : Calcul d'espérances** Soit $B$ un processus continu et $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle. Soit

$$S_t = S_0 \exp\left[(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t\right].$$

Calculer l'espérance et la variance de $S_t$.

**Exercice 13 : Martingales**

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ est un Mouvement Brownien et $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle, montrer que les processus suivants sont des $\mathcal{F}$-martingales:

- $(B_t)_{t\geq 0}$
- $\left(B_t^2 - t\right)_{t\geq 0}$
- $\left(e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2 t}{2}}\right)_{t\geq 0}$ *appelé Brownien Exponentiel.*

**Exercice 14 : Caractérisation du Mouvement Brownien**

Soit $B$ un processus continu et $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle. Montrer que $B$ est un mouvement Brownien si et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le processus complexe $M^\lambda$ défini par:

$$M_t^\lambda \quad := \quad e^{i\lambda B_t + \frac{\lambda^2 t}{2}}$$

est une $\mathcal{F}$-martingale.

**Exercice 15 : Mouvements Browniens**

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un Mouvement Brownien. Montrez que les processus suivants sont également des Mouvements Browniens:

- $\left(\frac{1}{a} B_{a^2 t}\right)_{t\geq 0}$
- $(B_{t+t_0} - B_{t_0})_{t\geq 0}$
- Le processus défini par $tB_{1/t}$ pour $t > 0$ et prolongé par 0 en $t = 0$.

**Exercice 16 : Limite á l'infini du Brownien** L'objectif de cet exercice est de montrer que $\frac{W_t}{t}$ converge presque sûrement vers 0 lorsque $t$ tend vers l'infini.

1. Pourquoi la suite $\left(\frac{W_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle presque sûrement vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini?

2. Vérifier que pour $t \in [n, n+1]$,
$$\left|\frac{W_t}{t}\right| \leq \left|\frac{W_n}{n}\right| + \frac{\sup_{t\in[n,n+1]} |W_t - W_n|}{n}.$$

3. Pourquoi les variables aléatoires $\left(X_n = \sup_{t\in[n,n+1]}(W_t - W_n)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles identiquement distribuées?
Vérifier que $X_0 \leq (\sup_{t\in[0,1]} W_t)^2 + (\sup_{t\in[0,1]} -W_t)^2$ et en déduire que $\mathbb{E}(X_0) \leq 2$.

4. Montrer que $\mathbb{E}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{X_n}{n^2}\right) < +\infty$. En déduire que la suite $\left(\frac{X_n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0 et conclure

**Exercice 17 : Mouvement brownien?**

Soit $Z$ une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite. Pour tout $t \geq 0$ on pose $X_t = \sqrt{t}Z$. Le processus stochastique $X = \{X_t; t \geq 0\}$ a des trajectoires continues et $X_t$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0, t)$. Est-ce un mouvement brownien?

**Exercice 18 : Transformée de Laplace**

Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Pour chaque réel $u \in \mathbb{R}$, on pose:
$$\varphi(u) = \mathbb{E}\left[e^{u(X-\mu)}\right].$$
Pour chaque $u$, calculer $\varphi(u)$, $\varphi'(u)$, $\varphi^{(2)}(u)$ et $\varphi^{(4)}(u)$. En déduire $\mathbb{E}[(X-\mu)^4] = 3\sigma^4$.

**Exercice 19 : Propriété de Markov**

Soit $B$ un processus continu et $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle. Pour toute fonction mesurable bornée $f$ et $t > s$, exprimer $\mathbb{E}[f(B_t)|\mathcal{F}_s]$ en fonction de $B_s$.

**Exercice 20 : Loi du logarithme itéré**

**1.** Montrez que si $X$ est une Normale centrée réduite, pour tout $\lambda > 0$, on a:

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \quad \leq \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\lambda} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

**2.** En déduire que si $W$ est un Mouvement brownien standard:

$$\overline{lim}_{n\to\infty} \frac{|W_n|}{\sqrt{2n\log n}} \quad \leq \quad 1$$

Pour information, un résultat dû à Paul Levy, nommé "loi du logarithme itéré" indique plus précisément que:

$$\overline{lim}_{t\to\infty} \frac{|W_t|}{\sqrt{2t\log t}} \quad = \quad 1$$

**Exercice 21 : Pont Brownien**

Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un M.B.S. On définit un nouveau processus $(Z_t)_{0\leq t\leq 1}$ par :

$$Z_t = B_t - tB_1.$$

1. Montrer que $(Z_t)_{0\leq t\leq 1}$ est un processus gaussien indépendant de $B_1$.

2. Calculer la moyenne $m_t$ et la fonction de covariance $K(Z_s, Z_t)$ du processus $(Z_t)_{0\leq t\leq 1}$.

3. Montrer que $\tilde{Z}_t = Z_{1-t}$ a même loi que $Z_t$.

4. Soit $Y_t = (1-t)B_{\frac{t}{1-t}}$ défini pour $0 \leq t < 1$.

   (a) Montrer que $Y_t$ tend vers 0 presque sûrement lorsque $t$ tend vers 1.

   (b) Montrer que le processus $(Y_t)_{0\leq t\leq 1}$ prolongé par 0 en 1 a la même loi que $(Z_t)_{0\leq t\leq 1}$.

**Exercice 22 : Fourier**

Soient $(B_t^1)_{0\le t\le T}$ et $(B_t^2)_{0\le t\le T}$ deux mouvements Browniens réels indépendants adaptés à la même filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$.

Soient $(H_t^1)_{0\le t\le T}$ et $(H_t^2)_{0\le t\le T}$ deux processus (CADLAG) adaptés à $\mathcal{F}$ et vérifiant

$$\forall t \in [0,T], \quad (H_t^1)^2 + (H_t^2)^2 = 1.$$

1. Montrer que les intégrales stochastiques $\int_0^t H_s^i dB_s^i$ pour $i = 1,2$ sont bien définies pour tout $t \le T$.

2. On considère le processus $(X_t)_{t\le T}$ défini par

$$\forall t \in [0,T], \quad X_t = \int_0^t H_s^1 dB_s^1 + \int_0^t H_s^2 dB_s^2.$$

   Montrer que $(X_t)_{t\le T}$ est une martingale pour la filtration $\mathcal{F}$. Le processus $X$ est-il continu ?

3. On définit, pour tout $u \in \mathbb{R}$, le processus $(M_t^u)_{t\le T}$ par

$$\forall t \in [0,T], \quad M_t^u = \exp(iuX_t) + \frac{u^2}{2}\int_0^t \exp(iuX_s)ds.$$

   Montrer en utilisant la formule d'Itô (on admettra sa validité sur les fonctions complexes) que $(M_t^u)$ est une martingale pour la filtration $\mathcal{F}$.

4. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[M_t^u]$ pour $t \in [0,T]$ puis une équation différentielle ordinaire vérifiée par $f^u : t \longmapsto \mathbb{E}[e^{iuX_t}]$ dont on explicitera une solution.

5. Soit $t \in [0,T]$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $X_t$ ?

6. On note, pour $u \in \mathbb{R}$ et $0 \le s \le t \le T$,

$$\phi^u(t,s) = \mathbb{E}\left[\exp\big(iu(X_t - X_s)\big) \;\big|\; \mathcal{F}_s\right].$$

   Calculer $\phi^u(s,s)$ et montrer que

$$\phi^u(t,s) = 1 - \frac{u^2}{2}\int_s^t \phi^u(v,s)dv.$$

   Déterminer explicitement la fonction $\phi^u$. Remarquez que $\phi^u$ n'est pas aléatoire.

7. Montrer que le processus $(X_t)_{0\le t\le T}$ est un mouvement Brownien.

## Mouvement Brownien et Intégrale d'Ito

Dans tout ce qui suit, $B$ désigne un mouvement brownien et $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle.

**Exercice 23 : Zéros du mouvement brownien.** Soient $0 < t_0 < t_1$. On désigne par $\alpha$ la probabilité que $B$ admette au moins un zéro dans l'intervalle $[t_0, t_1]$:

$$\alpha = \mathbb{P}(\exists t \in ]t_0; t_1[, B_t = 0).$$

Le but est de calculer explicitement la valeur de $\alpha$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $X = (a + B_t)_{t \geq 0}$. En utilisant la densité $f_{T_{-a}}$ du premier temps d'atteinte de $-a$ par un mouvement brownien standard

$$f_{T_{-a}}(x) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-a^2/(2x)} \mathbf{1}_{\{x>0\}}$$

   calculer $\mathbb{P}(\inf_{0 \leq s \leq t} X_s \leq 0)$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer que la probabilité pour que $B$ admette au moins un zéro dans $[t_0; t_1]$, sachant que $B_{t_0} = a$, est donnée par:

$$\frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_1 - t_0} \frac{1}{x^{3/2}} e^{-a^2/(2x)}\, dx.$$

3. En déduire que:

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{t_1}{t_0} - 1}.$$

**Exercice 24 : Fonction caractéristique de l'intégrale de Wiener.** Soit $\sigma(t)$ une fonction déterministe du temps telle que $\int_0^t \sigma(s)^2 ds < \infty$ pour tout $t > 0$ et soit $X_t = \int_0^t \sigma(s) dB_s$. En utilisant la formule d'Itô, montrer que la fonction caractéristique de $X_t$ ($t$ fixé) est donnée par

$$\mathbb{E}[e^{iuX_t}] = \exp\{-\frac{u^2}{2} \int_0^t \sigma(s)^2 ds\}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Que peut-on en déduire?

**Exercice 25 : Intégrale de Wiener**

Soit $f$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\, dt$ est finie. On considère le processus $(X_t)_{t\in[0,1]}$ défini par :

$$X_t \quad = \quad \int_0^t f(u)\, dB_u,$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un Mvt Brownien Standard et $(\mathcal{F}_t)$ sa filtration naturelle.

**1.** Montrer qu'une limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ d'une suite de variable aléatoires Gaussienne est nécessairement Gaussienne.

**2.** En déduire que le processus $(X_t)_{t\in[0,1]}$ est un processus Gaussien caractérisé par:

$$cov\left(\int_0^t f(s)dB_s, \int_0^u g(s)dB_s\right) \quad = \quad \int_0^{t\wedge u} f(s)g(s)ds$$

**3.** Montrer que $X_t$ est un processus à accroissements indépendants.

**4.** Quelle est la loi de $X_1$?

**Exercice 26 : Calcul de $\int_0^T B_s\, dB_s$**

On cherche à calculer $\int_0^T B_s\, dB_s$ avec $(B_t)_{0\leq t\leq T}$ un Mouvement Brownien standard. Pour tout entier $n$, considérons le processus défini sur $[0,T]$ par:

$$B^n_s \quad := \quad B_{i\frac{T}{n}}\, \mathbf{1}_{]i\frac{T}{n},(i+1)\frac{T}{n}[}(s)$$

**1.** Montrer que $B$ est la limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega,[0,T])$ du processus élémentaire $B^n$.

**2.** En déduire que le processus $\int_0^T B_s\, dB_s$ s'écrit comme limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ de:

$$\sum_{i=0}^{n-1} B_{i\frac{T}{n}}\left(B_{(i+1)\frac{T}{n}} - B_{i\frac{T}{n}}\right)$$

**3.** Quelle est la limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ de :

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(B_{(i+1)\frac{T}{n}} - B_{i\frac{T}{n}}\right)^2$$

**4.** En déduire la valeur de:

$$\int_0^T B_s\, dB_s$$

Remarquez que le processus obtenu est, comme attendu, une martingale.

**Exercice 27 : Théorème de Girsanov simplifié** Soit $(B_t)_{0\le t\le T}$ un mouvement brownien standard de filtration associée $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose

$$L_t = \exp\left(\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t\right).$$

a) Montrer que $L$ est une $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$-martingale et que $\mathbb{E}[L_t] = 1$ pour tout $0 \le t \le T$.

b) Pour $A \in \mathcal{F}_T$, on pose

$$\mathbb{P}^{L_T}(A) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T \mathbf{1}_A].$$

Pour tout $t \in [0, T]$, montrer que $\mathbb{P}^{L_t}$ est une probabilité.

c) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}_t$, $\mathbb{P}^{L_T}(A) = \mathbb{P}^{L_t}(A)$.

d) Montrer la formule de Bayes suivante:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{L_T}}[Y|\mathcal{F}_t] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T Y|\mathcal{F}_t]}{L_t}, \quad t \in [0, T],$$

pour toute v.a. $Y \in L^2(\mathbb{P})$.

e) On pose $B^*_t = B_t - \theta t$ pour tout $t \in [0, T]$. Montrer que pour tout $s \le t$, on a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{L_T}}\left[e^{iu(B^*_t - B^*_s)}|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{L_T}}\left[e^{iu(B^*_t - B^*_s)}\right] = e^{-\frac{u^2}{2}(t-s)}.$$

f) En déduire que $B^*$ est un $\mathbb{P}^{L_T}$-mouvement brownien standard de filtration $\mathcal{F}$.

**Exercice 28 : EDS et brownien géométrique** On s'intéresse à la solution $X_t$ de l'EDS:

$$X_t = \int_0^t (\mu X_r + \mu')\, dr + \int_0^t (\sigma X_r + \sigma')\, dB_r.$$

On pose $S_t = \exp\big((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t\big)$.

1. Ecrire l'EDS dont $S_t^{-1}$ est solution.

2. Démontrer que:

$$d(X_t S_t^{-1}) = S_t^{-1}\big((\mu' - \sigma\sigma')dt + \sigma' dB_t\big).$$

3. En déduire une expression pour $X_t$.

**Exercice 29 : Sous-martingale** Soit $X_t$ un processus adapté tel que

$$X_t = \int_0^t \mu(r)dr + \int_0^t \sigma(r)dB_r,$$

où on suppose que $\mu(t) \geq 0$ p.s. pour tout $t \geq 0$ et que $\sigma = (\sigma(t))$ est adapté et tel que $\mathbb{E}[\int_0^t \sigma(s)^2 ds] < \infty$ pour tout $t > 0$. Montrer que $X$ est une sous-martingale.

**Exercice 30 : Mouvement brownien changé de temps.**
Considérons le processus

$$X_t = e^{-t} W_{\frac{e^{2t}-1}{2}}, t \geq 0.$$

1. Montrer que $X$ est un processus gaussien centré. Calculer sa fonction covariance.

2. Justifier que que $X_t$ converge en loi vers une variable gaussienne dont on précisera les paramètres.

3. On souhaite montrer que $X$ suit l'équation différentielle stochastique

$$X_t = -\int_0^t X_s ds + B_t, \tag{1}$$

pour un certain mouvement brownien $B$ (construit à partir de $W$). Nous allons d'abord montrer qu'on peut écrire

$$W_{\frac{e^{2t}-1}{2}} = e^t B_t - \int_0^t e^s B_s ds, \quad \forall t. \tag{2}$$

En fait, au lieu de construire $B$ à partir de $W$ (ce qui sera faisable plus tard dans le cours), nous allons construire $W$ à partir de $B$. Pour cela, posons $Y_t = e^t B_t - \int_0^t e^s B_s ds$, à identifier avec $W_{\frac{e^{2t}-1}{2}}$ pour un certain $W$.

   (a) Prouver qu'il suffit d'établir que $(Y_t)_{t\geq 0}$ et $(W_{\frac{e^{2t}-1}{2}})_{t\geq 0}$ ont même fonction de covariance.

   (b) Établir l'égalité des fonctions de covariance.

   (c) De (2), déduire (1) (on calculera $X_t + \int_0^t X_s ds$).

Nous verrons dans la suite du cours que le processus $X$ est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, dont le rôle est central dans certains modèles de taux d'intérêt (Vasicek, 1977).

**Exercice 31 : Loi du sup du mouvement brownien.** Le but de cet exercice est de calculer la loi du couple $(B_t, \sup_{0\leq s\leq t} B_s)$.

1. Soit $T$ un temps d'arrêt borné. En utilisant le théorème d'arrêt de Doob, montrer que pour $z$ réel et $0 \leq u \leq v$
$$\mathbb{E}[e^{iz(B_{v+T}-B_{u+T})}|\mathcal{F}_{u+T}] = e^{-z^2(v-u)/2}.$$

2. En déduire que $B_u^T = B_{u+T} - B_T$ est un $\mathcal{F}_{u+T}$-mouvement brownien indépendant de la tribu $\mathcal{F}_T$.

3. Soit $(Y_t)_t$ un processus aléatoire continu indépendant de la tribu $\mathcal{F}$ tel que $\mathbb{E}[\sup_{0\leq s\leq K}|Y_s|] < +\infty$. Soit $S$ une variable aléatoire bornée par $K$. Montrer que:
$$\mathbb{E}[Y_S|\mathcal{F}] = \mathbb{E}[Y_t]_{|t=S}.$$

4. On pose $\tau_\lambda = \inf\{s \geq 0; B_s > \lambda\}$. Démontrer que si $f$ est une fonction borélienne bornée
$$\mathbb{E}\big[f(B_t)\mathbf{1}_{\{\tau^\lambda\leq t\}}\big] = \mathbb{E}\big[\phi(t-\tau^\lambda)\mathbf{1}_{\{\tau^\lambda\leq t\}}\big],$$
où $\phi(u) = \mathbb{E}[f(B_u+\lambda)]$. En déduire que
$$\mathbb{E}\big[f(B_t)\mathbf{1}_{\{\tau^\lambda\leq t\}}\big] = \mathbb{E}\big[f(2\lambda - B_t)\mathbf{1}_{\{\tau^\lambda\leq t\}}\big].$$

5. Montrer que si $B_t^* = \sup_{0\leq s\leq t} B_s$ et si $\lambda > 0$:
$$\mathbb{P}(B_t \leq \lambda, B_t^* \geq \lambda) = \mathbb{P}(B_t \geq \lambda, B_t^* \geq \lambda) = \mathbb{P}(B_t \geq \lambda).$$
En déduire que $B_t^*$ suit la même loi que $|B_t|$.

6. Démontrer que pour $\lambda \geq \mu$ et $\lambda \geq 0$:
$$\mathbb{P}(B_t \leq \mu, B_t^* \geq \lambda) = \mathbb{P}(B_t \geq 2\lambda-\mu, B_t^* \geq \lambda) = \mathbb{P}(B_t \geq 2\lambda - \mu)$$
et que si $\lambda \leq \mu$ et $\lambda \geq 0$:
$$\mathbb{P}(B_t \leq \mu, B_t^* \geq \lambda) = 2\mathbb{P}(B_t \geq \lambda) - \mathbb{P}(B_t \geq \mu).$$

7. Vérifier que la loi du couple $(B_t, B_t^*)$ est donnée par:
$$\mathbf{1}_{\{0\leq y\}}\mathbf{1}_{\{x\leq y\}}\frac{2(2y-x)}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp\Big(-\frac{(2y-x)^2}{2t}\Big)dxdy.$$

## Formule d'Ito

Dans tout ce qui suit, $B$ désigne un mouvement brownien et $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle.

**Exercice 32 : Covariation quadratique & Formule d'Intégration par partie**

La covariation quadratique entre 2 processus $X$ et $Y$ est par définition:

$$\langle X, Y\rangle \quad := \quad \frac{1}{4}\left(\langle X+Y\rangle - \langle X-Y\rangle\right)$$

**1.** Montrer que l'application $(X, Y) \mapsto \langle X, Y\rangle$ est bilinéaire.

**2.** Soient $X^1$ et $X^2$ deux processus d'Ito de la forme

$$dX_t^i \quad = \quad \varphi_t^i \, dt \; + \; \theta_t^i \, dW_t$$

Montrer que la covariation quadratique entre $X^1$ et $X^2$ est donnée par

$$\langle X^1, X^2\rangle_t \quad = \quad \int_0^t \theta_s^1 \, \theta_s^2 \, ds$$

**3.** Soient $X$ et $Y$ deux processus d'Ito, démontrer la formule d'intégration par partie:

$$d(XY)_t \quad = \quad X_s dY_s \; + \; Y_s dX_s \; + \; d\langle X, Y\rangle_s$$

**Exercice 33 : Formule d'Itô**

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$, un M.B.S. Donner l'équation différentielle stochastique vérifiée par les processus suivants:

- $X_t = \exp(ct + \alpha B_t)$
- $X_t = \frac{B_t}{1+t}$
- $(X_t^1, X_t^2) = (\cosh B_t, \sinh B_t)$
- $X_t = e^{\int_0^t Y_s dBs - \frac{1}{2}\int_0^t Y_s^2 ds}$
- $Z_t = ln\left(\frac{X_t}{1-X_t}\right)$ avec $X_t$ satisfaisant $dX_t = X_t(1-X_t)dB_t$

**Exercice 34 : Mouvement brownien géométrique** Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ l'unique solution de l'EDS

$$X_t = X_0 + \alpha \int_0^t X_r dr + \int_0^t \sigma X_r dB_r,$$

c-à-d $X$ est un mouvement Brownien géométrique (MBG). En outre, soit $\beta$ une constante. Montrer que $Y^\beta$ aussi est un MBG dont on précisera le drift et le coefficient de diffusion.

**Exercice 35 : Comparaison de Processus**

On suppose connue la fonction

$$\phi(a,T) \quad := \quad \mathbb{P}(W_t \leq at\,,\, t \leq T)$$

avec $W$ un Mouvement Brownien.
Soient $W^1$ et $W^2$ deux mouvements Browniens indépendants et

$$\begin{aligned} dX_t^1 &= X_t^1(\mu_t^1 dt + \sigma_t^1 dW_t^1)\,, \\ dX_t^2 &= X_t^2(\mu_t^2 dt + \sigma_t^2 dW_t^2)\,. \end{aligned}$$

Calculer, en fonction de $\Phi$, la quantité

$$\mathbb{P}(X_t^1 \leq X_t^2\,,\, t \leq T)\,.$$

**Exercice 36 : Processus d'Ornstein-Ulhenbeck**.
Le processus d'Ornstein-Ulhenbeck est l'unique solution de l' équation différentielle stochastique suivante

$$dX_t = -cX_t dt + \sigma dW_t;$$

On suppose que $X_0$ est une variable aléatoire gaussienne indépendante de $W$.

1. En posant $Y_t = X_t \exp(ct)$, donner la forme explicite du processus $(X_t)$.
2. Donner la loi de $X_t$. Que vaut $Cov(X_s, X_t)$?
3. Trouver la loi de $X_0$ telle que $\forall t$, la loi de $X_t$ ne dépend pas de $t$ (loi stationnaire).
4. Quelle est la loi limite de $X_t$ lorsque $t \to +\infty$?
5. Montrer que $Z_t = \exp(a \int_0^t X_s dWs - \frac{a^2}{2} \int_0^t X_s^2 ds)$ est une martingale locale.
6. Soit $U_t = X_t^2$. Ecrire $dU_t$.
7. En déduire que $\int_0^t X_s dW_s = \frac{1}{2\sigma}(X_t^2 - X_0^2 - \sigma^2 t) + \frac{c}{\sigma} \int_0^t X_s^2 ds$.

**Exercice 37 : Etude d'EDS.** Soit l'EDS

$$dX_t = bX_t\,dt + dB_t, \quad X_0 = x.$$

1. On pose $Y_t = e^{-t}X_t$. Quelle est l'EDS vérifiée par $Y_t$? Exprimer $Y_t$ sous la forme $Y_t = y + \int_0^t f(r)\,dB_r$ où l'on explicitera la fonction $f$.
2. Calculer $\mathbb{E}(Y_t)$ et $\mathbb{E}(Y_t^2)$.
3. Justifier que $\int_0^t Y_s\,ds$ est un processus gaussien. Calculer $\mathbb{E}[\exp(\int_0^t Y_u\,dB_u)]$.
4. Exprimer $Y_t$ pour $t > s$ sous la forme $Y_t = Y_s + \int_s^t g(u)\,dB_u$ où l'on précisera la fonction $g$. Calculer $\mathbb{E}[Y_t|\mathcal{F}_s]$ et $\mathrm{Var}(Y_t|\mathcal{F}_s)$.
5. Calculer $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]$ et $\mathrm{Var}(X_t|\mathcal{F}_s)$.

**Exercice 38 : EDP**

Soit $f$ une fonction bornée sur $\mathbb{R}$. On désire résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{pour } t > 0 \\ u(0,x) = f(x) & \end{cases}$$

où $u$ est une fonction de deux variables $u(t,x)$, de classe $\mathcal{C}^1$ en $t$ et $\mathcal{C}^2$ en $x$. Cette équation modélise l'évolution de la chaleur d'un fil au cours du temps avec une condition initiale $f$ à $t = 0$.

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un M.B.S.

1. Soit $u$ une solution du problème précédent et $t > 0$. Montrer, en utilisant la formule d'Itô que $M$ dÈfini sur $[0,t]$ par $M_s = u(t-s, x+B_s)$ est une martingale locale.

2. Montrer que $M$ est une martingale. En déduire que pour tout $t > 0$, on a:

$$u(t,x) = \mathbb{E}[f(B_t + x)]$$

## Black Scholes

Dans tout ce qui suit, $B$ désigne un mouvement brownien et $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle.

**Exercice 39 : Modèle de Black Scholes.** On considére un actif risqué $S$ obéissant à la dynamique suivante

$$dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dB_t)$$

où $\mu, \sigma(> 0)$ sont des constantes.

1. Ecrire la formule d'Itô pour une fonction du type $f(t, S_t)$. En déduire que $S_T$ suit une loi log-normale dont on précisera la moyenne et la variance.

2. Donner la moyenne et la variance de l'actif $S_T$ sous la probabilité risque neutre.

3. Le payoff d'un actif contingent de type européen est donné à la date $T$ par la quantité $1/S_T$. Utiliser la probabilité risque neutre pour montrer que le prix à la date $t < T$ de ce produit est donné par

$$\frac{1}{S_t} \exp\big((\sigma^2 - r)(T - t)\big).$$

4. Utiliser la formule d'Itô et un argument d'arbitrage pour déterminer l'équation satisfaite par la valeur $V(t, S_t)$ d'une option européenne (ie de payoff de type $P = g(S_T)$).

5. On suppose que les actifs distribuent des dividendes selon un taux continu $q$. $r$ désigne le taux d'intérêt continu de l'actif sans risque. Montrer que la valeur $V(t, S_t)$ d'une option européenne satisfait l'équation

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} = rV$$

dont on précisera les conditions initiales. Exprimer le prix du call européen dans ce modèle.

**Exercice 40 : Formule de Black Scholes**

Soit l'équation différentielle stochastique :

$$dS_t = \mu S_t \; dt + \sigma S_t \; dB_t, \tag{3}$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un M.B.S.

1. Soit un réel $r$. On pose $\widetilde{S}_t = e^{-rt} S_t$.

   (a) Montrer que $\widetilde{S}_t$ vérifie une nouvelle équation différentielle stochastique.

   (b) Soit $W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$. Montrer qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente à la probabilité de départ $\mathbb{P}$ sous laquelle $(W_t)_{t\geq 0}$ est un M.B.S.

   (c) Écrire que :

   $$d\widetilde{S}_t = \sigma \widetilde{S}_t \; dW_t.$$

   En déduire que $(\widetilde{S}_t)_{t\geq 0}$ est une martingale sous $\mathbb{P}^*$ et que :

   $$\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_0 \, e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t}.$$

2. On pose $(x)_+ = \max(x, 0)$ et on désigne par $\mathbb{E}^*$ l'espérance sous $\mathbb{P}^*$. Soit $K > 0$ et soit $C = \mathbb{E}^* \left( e^{-rT} (S_T - K)_+ \right)$. Montrer que :

   $$C = -K e^{-rT} \Phi(d_2) + S_0 \Phi(d_1),$$

   où $\Phi$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, $d_1 = \dfrac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}}$ et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$.

**Exercice 41 : Symétrie Call Put**

Soit $M$ une $\mathcal{F}$- martingale telle que $dM_t = \sigma M_t dW_t$ avec $\sigma$ donné et $M_0 = 1$.

1. Vérifier que $M$ est strictement positive.

2. Déterminer la dynamique de $Y$ défini par $Y_t = (M_t)^{-1}$.

3. Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité définie par $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P} = M$. Déterminer la loi de $Y$ sous $\mathbb{Q}$.

4. Etant donné un strike $K$, montrer que l'on a la relation

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[ (M_T - K)^+ \right] \quad = \quad K \, \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[ \left( \frac{1}{K} - M_T \right)^+ \right]$$

**Exercice 42 : Changement de numéraire**

Soient $S^1$ et $S^2$ deux processus d'Itô donnés par

$$\begin{cases} dS_t^1 &= Y_t^1\,dt + Z_t^1\,dB_t \\ dS_t^2 &= Y_t^2\,dt + Z_t^2\,dB_t \end{cases}$$

avec $B$ un mouvement Brownien de filtration naturelle $\mathcal{F}$ et $Y^1$, $Y^2$, $Z^1$ et $Z^2$ des processus $\mathcal{F}$-adaptés de $L^2(\Omega, [0,T])$.

Soient $\varphi^1$ et $\varphi^2$ deux processus adaptés bornés. Considérons le processus:

$$X_t = \varphi_t^1 S_t^1 + \varphi_t^2 S_t^2$$

et supposons qu'il satisfait la condition:

$$dX_t = \varphi_t^1\,dS_t^1 + \varphi_t^2\,dS_t^2$$

Montrer que pour tout processus d'Itô $U$ $\mathcal{F}$-adapté, on a la relation:

$$d(U\,X)_t = \varphi_t^1\,d(U\,S^1)_t + \varphi_t^2\,d(U\,S^2)_t$$

Comment traduire cette propriété en terme de stratégie de portefeuille ?

**Exercice 43 : Moments de la solution de l'EDS de Black Scholes**

Soit $B$ un Mouvement Brownien Standard. On considère l'équation différentielle de Black Scholes:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \qquad \text{et} \qquad S_0 = x$$

**1.** Montrer que l'unique solution de cette équation est :

$$S_t = x\,e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\,W_t}$$

**2.** Calculer $\mathbb{E}[S_t]$.

**3.** Pour $\alpha \geq 2$, déterminez l'EDS vérifiée par $S_t^\alpha$.

**4.** En déduire $\mathbb{E}[S_t^\alpha]$ pour $\alpha \geq 2$.

## Pricing d'Options

**Exercice 44 : Option sur moyenne**

Soit $S$ le processus donné par $dS_t = S_t(rdt + \sigma dB_t), \qquad , S_0 = 1\,,$
avec $r, \sigma$ deux constantes et $B$ un mouvement Brownien. On souhaite calculer $C = \mathbb{E}\left[(Z_T - S_T)^+\right]$ avec $Z_T := \mathbb{E}\left[\frac{1}{T}\int_0^T \ln(S_t)dt\right]$. Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité définie par

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_T \;=\; e^{\sigma B_T - \sigma^2 T/2}\,.$$

1. Montrer que

$$e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[(Z_T - S_T)^+\right] \;=\; \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(\frac{Z_T}{S_T} - 1\right)^+\right]$$

2. Soit $\bar{B}_t := B_t - \sigma t$. Ecrire $Z_T/S_T$ sous la forme $e^{\alpha T - \int_0^T \beta(t) d\bar{B}_t}$.

3. Déterminer $K$ pour que le calcul de $C$ se réduise au calcul de $\mathbb{E}\left[(\tilde{S}_T - K)^+\right]$ avec $\tilde{S}$ un mouvement Brownien géométrique dont on précisera la dynamique.

**Exercice 45 : Produit forward-start** On suppose que la dynamique du prix (en dollars) de l'action américaine FAD, qui ne verse pas de dividendes, est donnée par:

$$dS_t = S_t\big(\mu(t, S_t)\,dt + \sigma(t)\,dB_t\big),$$

où $\sigma$ est une fonction déterministe du temps. Soit un call européen de date $T_2$ écrit sur une action FAD et de type "forward-start", c'est-à-dire que son strike n'est pas connu à sa date de création ($t = 0$) mais sera fixé égal à sa valeur $S(T_1)$ de l'action FAD observée à la date $T_1(< T_2)$. Il sera donc à la monnaie en $T_1$ et vaudra en $T_2$ (en dollars) $(S_{T_2} - S_{T_1})_+$.

1. Dériver la formule (du type Black-Scholes) donnant le prix du call en $T_1$ tel que côté à New-York, en utilisant la notation $\tau = T_2 - T_1$.

2. Calculer le prix du call en $t = 0$ tel que côté à New-York. Pour ce faire, utiliser la propriété d'homogénéité (de degré 1 en prix du support et en prix d'exercice) de la valeur d'une option, c'est-à-dire

$$C(S_{T_1}, S_{T_1}, \tau) = S_{T_1} C(1, 1, \tau).$$

3. Donner l'interprétation financière du résultat précédent.

4. Supposer que le prix d'exercice fixé en $T_1$ est égal à $kS_{T_1}$ où $k$ est une constante positive différente de 1 et recalculer le prix du call.

**Exercice 46 : Options asiatiques** Soit $S_t$ la solution de l'EDS

$$dS_t = S_t(r\,dt + \sigma\,dB_t)$$

les paramètres $r$ et $\sigma$ étant constants.

1. Soit $K$ une constante. Montrer que le processus $M_t = \mathbb{E}\Big((\frac{1}{T}\int_0^T S_r\,dr - K)_+|\mathcal{F}_t\Big)$ est une martingale.

2. Montrer que si l'on pose $Q_t = S_t^{-1}\big(K - \frac{1}{T}\int_0^t S_r\,dr\big)$, on a

$$M_t = S_t\mathbb{E}\Big((\frac{1}{T}\int_t^T \frac{S_r}{S_t}\,dr - Q_t)_+|\mathcal{F}_t\Big).$$

3. Soit $u(t,x) = \mathbb{E}\Big((\frac{1}{T}\int_t^T \frac{S_r}{S_t}\,dr - x)_+\Big)$. Montrer que $u(t,x) = \mathbb{E}\Big((\frac{1}{T}\int_t^T \frac{S_r}{S_t}\,dr - x)_+|\mathcal{F}_t\Big)$ et que $M_t = S_t u(t, Q_t)$.

4. Ecrire la formule d'Itô pour $M$ et en déduire une équation aux dérivées partielles vérifiée par $u$.

**Exercice 47 : Réduction de variance par échantillonnage préférentiel.**
Soit $G$ une gaussienne centrée réduite.

1. Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, vérifier que

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\left(f(G+\theta)e^{-\theta G - \frac{\theta^2}{2}}\right) = \mathbb{E}(f(G)) \tag{4}$$

2. Vérifier que

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(f(G+\theta)e^{-\theta G - \frac{\theta^2}{2}}\right) = v(\theta) - (\mathbb{E}(f(G)))^2 \text{ où } v(\theta) = \mathbb{E}\left(f^2(G)e^{-\theta G + \frac{\theta^2}{2}}\right).$$

3. On suppose désormais que $\mathbb{P}(f^2(G) > 0) > 0$.
Montrer que pour $a > 0$ suffisamment grand, $\mathbb{P}(f^2(G) > 1/a, G > -a) > 0$ et en déduire que $\lim_{\theta\to-\infty} v(\theta) = +\infty$. Montrer également que $\lim_{\theta\to+\infty} v(\theta) = +\infty$.
Calculer $v''(\theta)$ par dérivation sous le signe espérance et conclure à l'existence d'un unique $\theta^* \in \mathbb{R}$ qui minimise $\theta \to \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(f(G+\theta)e^{-\theta G - \frac{\theta^2}{2}}\right)$.
Soit $(G_i)_{i\geq 1}$ une suite de gaussiennes centrées réduites indépendantes. Proposer un estimateur de $\mathbb{E}(f(G))$ préférable à $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(G_i)$.

4. On suppose que la fonction $f$ est $C^1$ à dérivée bornée. Quelle est la limite de $\frac{1}{\theta}\left(f(G+\theta)e^{-\theta G - \frac{\theta^2}{2}} - f(G)\right)$ lorsque $\theta$ tend vers 0?
En déduire que $\mathbb{E}(f'(G)) = \mathbb{E}(Gf(G))$. Retrouver ce résultat directement.

**Exercice 48 : Les options barrière: l'EDP et l'interprétation comme espérance**.
On suppose maintenant que les taux d'intérêt sont constants et égaux à $r$, que l'actif risqué suit une dynamique de type brownien géométrique décrite par $S_t = S_0 \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t)$. Les options considérées ont pour échéance $T$.
On considère le problème de la valorisation de l'option barrière Down-In-Call (resp. Down-Out-Call) promettant à l'échéance $\mathbf{1}_{\tau_H \leq T}(S_T - K)_+$ (resp. $\mathbf{1}_{\tau_H > T}(S_T - K)_+$), avec $\tau_H = \inf\{t \geq 0 : S_t \leq H\}$. Son prix à l'instant 0 sera noté simplement $\mathrm{DIC}(x, K, H)$ (resp. $\mathrm{DOC}(x, K, H)$).

1. Par un raisonnement d'arbitrage, montrer que les prix des différentes options sont reliés par la relation

$$\mathrm{DIC}(x, K, H) + \mathrm{DOC}(x, K, H) = \mathrm{Call}(0, x, K).$$

2. Pour couvrir le DOC, nous cherchons un portefeuille autofinançant dont la valeur s'écrit $V_t = v(t \wedge \tau_H, S_{t \wedge \tau_H})$ pour une certaine fonction régulière $v$. Déterminer l'EDP satisfaite par $v$ (attention aux conditions aux limites qui prennent en compte la barrière) ainsi que la couverture associée.

3. Calculer $\mathbb{E}(e^{-rT \wedge \bar{\tau}_H} v(T \wedge \bar{\tau}_H, \bar{S}_{T \wedge \bar{\tau}_H}))$ et montrer que

$$\mathrm{DOC}(x, K, H) = \mathbb{E}\left(e^{-rT} \mathbf{1}_{\bar{\tau}_H > T}(\bar{S}_T - K)_+\right), \tag{5}$$

   où $\bar{\tau}_H = \inf\{t \geq 0 : \bar{S}_t \leq H\}$ et $\bar{S}_t = S_0 \exp((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t)$.

4. En déduire que

$$\mathrm{DIC}(x, K, H) = \mathbb{E}\left(e^{-rT} \mathbf{1}_{\bar{\tau}_H \leq T}(\bar{S}_T - K)_+\right), \tag{6}$$

**Exercice 49 : Les options barrière: des formules explicites pour les prix**.
L'objectif de cet exercice est de calculer explicitement $\mathrm{DIC}(x, K, H)$ à partir de l'égalité (6), en exploitant simplement des relations de symétrie. Nous nous restreignons au cas *regular* (à savoir $K > H$) (à l'opposé du cas *reverse* lorsque $K \leq H$).

1. Que vaut $\mathrm{DIC}(x, K, H)$ lorsque $x \leq H$?

On suppose maintenant $x > H$.

2. Montrer la relation de symétrie Call-Put

$$\mathrm{Call}(t, Ke^{-r(T-t)}, x) = \mathrm{Put}(t, xe^{-r(T-t)}, K)$$

et d'homogénéité ($\lambda \geq 0$)

$$\mathrm{Call}(t, \lambda x, \lambda K) = \lambda \mathrm{Call}(t, x, K), \quad \mathrm{Put}(t, \lambda x, \lambda K) = \lambda \mathrm{Put}(t, x, K).$$

3. On suppose dans cette question que $r = 0$.
   (a) Justifier que $(\bar{S}_t)_{t \geq 0}$ est une martingale et les prix des options pour ce cas-là seront notés $\mathrm{Call}^{\mathrm{M}}$, $\mathrm{DIC}^{\mathrm{M}}$, etc.
   (b) Montrer que $\mathrm{DIC}^{\mathrm{M}}(x, K, H) = \mathrm{Put}^{\mathrm{M}}(x, \frac{H^2}{K})\frac{K}{H} = \mathrm{Call}^{\mathrm{M}}(H, K\frac{x}{H})$.
   (c) En déduire une stratégie statique de couverture de l'option DIC dans le cas $r = 0$.

4. Introduisons $\gamma = 1 - \frac{2r}{\sigma^2}$. Supposons d'abord que $\gamma > 0$.
   (a) Prouver qu'on a $\bar{S}_t = (M_t)^{1/\gamma}$ pour une certaine martingale log-normale $M$.
   (b) Considérons l'option Binary DIC (resp. Binary Call) promettant à l'échéance $\mathbf{1}_{\tau_H \leq T}\mathbf{1}_{S_T \geq K}$ (resp. $\mathbf{1}_{S_T \geq K}$). Son prix vaut $\mathrm{BinDIC}(x, H, K) = \mathbb{E}\left(e^{-rT}\mathbf{1}_{\bar{\tau}_H \leq T}\mathbf{1}_{\bar{S}_T \geq K}\right)$ (resp. $\mathrm{BinCall}(x, K) = \mathbb{E}\left(e^{-rT}\mathbf{1}_{\bar{S}_T \geq K}\right)$).
   En passant par l'intermédiaire de la martingale $M$, montrer
   $$\forall K \geq H \quad \mathrm{BinDIC}(x, H, K) = \left(\frac{x}{H}\right)^{\gamma} \mathrm{BinCall}(H, K\frac{x}{H}).$$
   (c) En déduire que le prix de l'option DIC est donné par la formule
   $$\mathrm{DIC}(x, H, K) = \left(\frac{x}{H}\right)^{\gamma - 1} \mathrm{Call}(H, K\frac{x}{H}).$$

5. Généraliser la formule précédente à toutes les valeurs de $\gamma$.

## Modeles de Taux

### Exercice 50 : Le modèle de Vasiček pour le taux d'intérêt

On considère un marché financier où il existe une unique probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$ qui rende tout actif réactualisé martingale. Sous cette probabilité neutre au risque $\mathbb{Q}$, le taux d'intérêt spot est décrit par la dynamique suivante

$$\begin{aligned} dr_t &= (a - br_t)\, dt + \sigma dB_t\,, \\ r_0 &= r \end{aligned} \tag{7}$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard, et où $a$, $b$, $\sigma$ et $r$ sont des constantes strictement positives.

1. Déterminez l'EDS satisfaite par le processus $X_t = e^{bt}r_t$.
2. Déterminez la solution $X_t$, puis déduisez la solution $r_t$ de l'EDS (7)
3. Vérifiez que la variable aléatoire $r_t$ suit une loi normale. Calculez sa moyenne et sa variance.

   On considère, dans ce marché, un zéro-coupon de maturité $T$. C'est à dire une obligation qui verse à la personne qui la détient 1 unité monétaire à la maturité $T$.
4. Déduisez que le zéro-coupon est un produit dérivé particulier et donnez son pay-off à la date $T$.
5. En utilisant l'évaluation neutre au risque, montrez que le prix à la date $t$ du zéro-coupon , noté $P(t,T)$, est égal à

$$P(t,T) \;=\; \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)|\mathcal{F}_t\right] \tag{8}$$

6. Calculez explicitement $P(t,T)$.

**Exercice 51 : Stratégies autofinancées de zéro–coupons**.

On considère le modèle de Heath–Jarrow–Morton : pour tout $T > 0$ le taux instantané forward de maturité $T$ est décrit par

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \mu_f(s,T)ds + \int_0^t \sigma_f(s,T)dW_s,$$

où $\sigma_f(\cdot,T)$ est une fonction continue bornée. La fonction $\mu_f(s,T)$ est définie par

$$\mu_f(s,T) = \sigma_f(s,T)\sigma_f^*(s,T), \text{ avec } \sigma_f^*(s,T) := \int_s^T \sigma_f(s,u)du.$$

On admet que le prix au temps $0 \leq t \leq T$ d'un zéro–coupon de maturité $T$ est donné par

$$B(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,s)ds\right). \tag{9}$$

Soit $r_t$ le taux instantané $f(t,t)$ :

$$r_t = f(0,t) + \int_0^t \sigma_f(s,t)\sigma_f^*(s,t)ds + \int_0^t \sigma_f(s,t)dW_s. \tag{10}$$

De (9) et (10) on peut déduire (l'admettre...) que, pour tout $T$, le processus $(B(t,T), t \leq T)$ résout l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dB(t,T) &= r_t B(t,T)dt - \sigma_f^*(t,T)B(t,T)dW_t, \\ B(T,T) &= 1. \end{cases} \tag{11}$$

On se donne deux maturités $T^O$ et $T$ avec $T^O < T$. À chaque date $0 \leq t \leq T^O$, une stratégie autofinancée consiste à acheter ou vendre une quantité $H_t^O$ de zéro–coupons de maturité $T^O$ et une quantité $H_t$ de zéro–coupons de maturité $T$ telles que:

**(i)** Le portefeuille est autofinancé, c'est–à–dire : si on note

$$V_t := H_t^O B(t,T^O) + H_t B(t,T)$$

la valeur au temps $t$ du portefeuille, alors

$$V_t = V_0 + \int_0^t H_\theta^O dB(\theta,T^O) + \int_0^t H_\theta dB(\theta,T).$$

**(ii)** Les processus $(H_t^O)$ et $(H_t)$ sont tels que les intégrales stochastiques qui apparaîtront dans les calculs sont bien définies et sont des martingales.

**1.** L'objectif est de caractériser les stratégies autofinancées. Pour $t \leq T^O$ on définit le prix Forward $B^F(t,T)$ du zéro–coupon de maturité $T$ par

$$B^F(t,T) := \frac{B(t,T)}{B(t,T^O)}.$$

Montrer

$$d\left(\frac{1}{B(t,T^O)}\right) = -\frac{1}{B(t,T^O)}(r_t dt - \sigma_f^*(t,T^O)dW_t) + \frac{1}{B(t,T^O)}\sigma_f^*(t,T^O)^2 dt,$$

puis

$$dB^F(t,T) = B^F(t,T)\sigma_f^*(t,T^O)(\sigma_f^*(t,T^O) - \sigma_f^*(t,T))dt + B^F(t,T)(\sigma_f^*(t,T^O) - \sigma_f^*(t,T))dW_t.$$

**2.** Soit $V_t^F$ la valeur Forward du portefeuille définie par

$$V_t^F := \frac{V_t}{B(t,T^O)}.$$

En appliquant la formule d'Itô, montrer

$$dV_t^F = H_t dB^F(t,T).$$

Montrer que cette égalité s'obtient aussi (et plus rapidement) par la technique du changement de numéraire.

**Exercice 52 : Stratégie de couverture d'options sur zéro–coupon.**
On considère une option de maturité $T^O$ et de flux à l'échéance égal à $\Phi(B(T^O,T))$, où $\Phi$ est une fonction donnée.

**1.** À l'aide de (11) montrer que les processus

$$\left(B(t,T^O)\exp\left(-\int_0^t r_\theta d\theta\right), t \le T^O\right)$$

et

$$\left(B(0,T^O)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_f^*(\theta,T^O)^2\ d\theta - \int_0^t \sigma_f^*(\theta,T^O)\ dW_\theta\right), t \le T^O\right)$$

sont solutions de la même équation différentielle stochastique.

**2.** Montrer que le processus défini pour $0 \le t \le T^O$ par

$$L_t := \frac{B(t,T^O)}{\exp(\int_0^t r_\theta d\theta) B(0,T^O)}$$

est une martingale exponentielle.

**3.** Considérer la probabilité forward risque neutre $\mathbb{P}^F$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_{T^O})$ définie par

$$\frac{d\mathbb{P}^F}{d\mathbb{P}} = L_{T^O}.$$

Montrer que, sous $\mathbb{P}^F$, les processus $(B^F(\cdot,T))$ et $(V_t^F)$ sont des martingales.

**4.** On suppose qu'il existe une solution régulière $\pi_{\sigma_f}$ au problème parabolique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_{\sigma_f}}{\partial t}(t,x) + \dfrac{1}{2}x^2(\sigma_f^*(t,T) - \sigma_f^*(t,T^O))^2 \dfrac{\partial^2 \pi_{\sigma_f}}{\partial x^2}(t,x) = 0, \\ \pi_{\sigma_f}(T^O,x) = \Phi(x). \end{cases}$$

Montrer

$$V_t^F = \pi_{\sigma_f}(t, B^F(t,T)).$$

Indication : on pourra commencer par vérifier

$$V_t^F = \mathbb{E}^F[\phi(B^F(T^O,T))|\mathcal{F}_t] \text{ p.s.}$$

**5.** Montrer que la stratégie de couverture de l'option est

$$\begin{cases} H_t &= \dfrac{\partial \pi_{\sigma_f}}{\partial x}(t, B^F(t,T)), \\ H_t^O &= \pi_{\sigma_f}(t, B^F(t,T)) - H_t B^F(t,T). \end{cases}$$