Vitesse de convergence des itérés d'un opérateur de transition sur le cercle

Julien Brémont
Mémoire de DEA, sous la direction de Jean-Pierre Conze

Université de Rennes I, année 1998/99

Introduction.

On se place sur le cercle S^1. Soit $\alpha \in]0,1[$. On considère la marche aléatoire suivante : départ en un point quelconque et à chaque étape, déplacement de $\pm\alpha$ avec probabilité $\frac{1}{2}$. Si α est rationnel, la marche se déroule sur un groupe fini cyclique. En se référant à [1], le résultat est le suivant : il n'y a convergence en loi que si le cardinal du groupe est impair. Dans un tel cas, du point de vue de la distance en variation, on peut établir une vitesse de convergence exponentielle vers la loi uniforme sur le groupe.
Quand α est irrationnel, il est bien connu que la marche aléatoire converge en loi vers la loi uniforme sur le cercle, mais on ne dispose, à l'heure actuelle, que de peu de renseignements d'ordre quantitatif. Nous envisageons le problème sous l'angle de l'approximation par des groupes finis. Dans un premier temps, nous établirons un résultat qui généralisera le calcul effectué dans [1] et qui nous permettra notamment de contourner le problème de parité. Nous étudierons ensuite la convergence en loi de manière ponctuelle en nous intéressant aux itérés de l'opérateur de transition associé à la marche appliqués à la classe des fonctions $C^{r,s}(S^1,\mathbb{R})$. Nous montrerons par exemple que si le développement en fraction continue de α est borné, alors la vitesse de convergence pour la norme infinie est en $O\left(k^{-\frac{r+s}{2}}\right)$. Nous obtiendrons également des vitesses pour des angles de type fini quelconque. Nous montrerons alors que les ordres de grandeur obtenus sont optimaux et nous donnerons un résultat général de minoration pour des fonctions continues. Nous verrons enfin comment exploiter l'inégalité de Denjoy-Koksma ainsi que les résultats d'un article de septembre 1998 paru dans "Transactions of the AMS", qui traite du même sujet mais du point de vue des lois.
En dernière partie, nous appliquerons cette méthode d'approximation à la construction de contre-exemples au théorème central limite. Nous déterminerons explicitement une famille d'angles associés à certaines fonctions pour lesquels le TCL n'est pas vérifié.

Modélisation.

En fixant un réel α, on note μ_α la probabilité sur S^1 telle que $\mu_\alpha(\pm\alpha) = \frac{1}{2}$ et P_α l'opérateur de transition sur le cercle défini par :

$$P_\alpha(f)(x) = \frac{1}{2}f(x+\alpha) + \frac{1}{2}f(x-\alpha).$$

On introduit $(X_k)_{k\geq 0}$ la suite des pas de la marche aléatoire standard sur $\mathbb{Z}$ faisant des sauts de ± 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$ et $(S_k)_{k\geq 0}$, la suite des sommes partielles de ces pas. L'opérateur de transition correspondant sur $\mathbb{Z}$ sera noté T :

$$T(f)(x) = \frac{1}{2}f(x+1) + \frac{1}{2}f(x-1).$$

En considérant la suite $(S_k\alpha \mod (1))_{k\geq 0}$ on obtient la marche aléatoire sur le cercle que nous allons étudier.

1 Groupes abéliens finis.

1.1 Un résultat général.

Soit G un groupe abélien fini et μ une mesure de probabilité sur G. Nous introduisons des opérateurs sur les fonctions numériques définies sur G. On note P_μ l'opérateur de transition correspondant à μ, c'est à dire tel que :

$$(P_\mu f)(x) = \sum_{y \in G} f(x+y)\mu(y).$$

A tout sous-groupe H de G, on associe M_H défini par :

$$M_H f(x) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} f(x+h).$$

On s'intéresse au comportement de $P_\mu^n f$ en norme infinie. L'opérateur P_μ est de norme 1, mais en considérant $f - M_H f$ plutôt que f, on peut obtenir une majoration explicite en fonction de H.

Théorème 1.1
Soit f une fonction numérique définie sur G. On pose $g = f - M_H f$. On a alors :

$$\forall n \geq 1, \ \left\| P_\mu^n(g) \right\|_\infty \leq \|g\|_\infty \left(\sum_{\chi \notin \widehat{G/H}} |\hat{\mu}(\chi)|^{2n} \right)^{\frac{1}{2}},$$

en notant $\widehat{G/H}$ le sous-groupe des caractères de G définis sur G/H, ie tels que $\chi(H) = \{1\}$.

Preuve du théorème :
On écrit tout d'abord :

$$\begin{aligned}
P_\mu g(x) &= \sum_{y \in G} g(x+y)\mu(y) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} g(x+y) \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(y)\hat{\mu}(\chi) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G/H}} \hat{\mu}(\chi) \sum_{y \in G} g(x+y)\chi(y) + \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \notin \widehat{G/H}} (\ ).
\end{aligned}$$

Du fait de la propriété de moyenne de g, le premier terme est nul. En effet :

$$\sum_{y \in G} g(x+y)\chi(y) = \sum_{\bar{a} \in G/H} \chi(a) \left(\sum_{h \in H} g(x+a+h) \right).$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned}
\|P_\mu g\|_\infty &\leq \|g\|_\infty \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} \left| \sum_{\chi \notin \widehat{G/H}} \chi(y)\hat{\mu}(\chi) \right| \\
&\leq \|g\|_\infty \frac{1}{\sqrt{|G|}} \left(\sum_{y \in G} \sum_{\chi_1 \chi_2 \notin \widehat{G/H}} \hat{\mu}(\chi_1)\chi_1(y)\overline{\hat{\mu}(\chi_2)\chi_2(y)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|g\|_\infty \frac{1}{\sqrt{|G|}} \left(|G| \sum_{\chi \notin \widehat{G/H}} |\hat{\mu}(\chi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|g\|_\infty \left(\sum_{\chi \notin \widehat{G/H}} |\hat{\mu}(\chi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

En substituant μ^{*n} à μ, il en résulte donc :

$$\left\| P_\mu^n g \right\|_\infty \leq \|g\|_\infty \left(\sum_{\chi \notin \widehat{G/H}} |\hat{\mu}(\chi)|^{2n} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Remarque. — L'utilisation de ce théorème nécessite de trouver un compromis entre une fonction g pas trop dégénérée (H grand) et une bonne majoration (H petit).

1.2 Marche avec un angle rationnel.

Soit $1 \leq m \leq n-1$ avec $(m,n) = 1$. Ici $\alpha = \frac{m}{n}$. Si le départ se situe en x, la marche a lieu sur $x + G$, avec $G = \{k\frac{m}{n},\ 0 \leq k \leq n-1\}$. On estime le terme majorant du théorème précédent pour $\mu = \mu_\alpha$ et certains choix de H.

Théorème 1.2
Si n est impair, on choisit $H = \{k\frac{m}{n}\}$ et dans ce cas $\widehat{G/H} = \{\chi_0\}$, avec $\chi_0(\frac{m}{n}) = 1$. Si n est pair, on choisit $H = \{2k\frac{m}{n}\}$ et dans ce cas $\widehat{G/H} = \{\chi_0, \chi_1\}$, avec $\chi_1(\frac{m}{n}) = -1$. Alors il existe des constantes universelles $A > 0$ et $b > 0$ telles que pour tout $n \geq 0$:

$$\forall k \geq n^2, \qquad \left(\sum_{\chi \notin \widehat{G/H}} |\hat{\mu_\alpha}(\chi)|^{2k} \right)^{\frac{1}{2}} \leq A e^{-b\frac{k}{n^2}}.$$

Preuve du théorème :
Plaçons-nous dans le cas n impair. On a :

$$\left(\sum_{\chi \neq \chi_0} \|\hat{\mu}_\alpha(\chi)\|^{2k} \right) = \sum_{j=1}^{n-1} \left[\cos\left(\frac{2\pi m j}{n}\right)\right]^{2k} = \sum_{j=1}^{n-1} \left[\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right]^{2k} = 2 \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right]^{2k}.$$

Nous utilisons le fait que sur $[0, \pi/2]$, $\cos(x) \leq e^{-\frac{x^2}{2}}$. Il en résulte :

– Si $j \leq \frac{n}{4}$: $\left[\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right]^{2k} \leq u^{j^2}$, avec $u = e^{-\frac{4\pi^2}{n^2}k}$. Par conséquent :

$$\sum_{1 \leq j \leq \frac{n}{4}} \left[\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right]^{2k} \leq \sum_{j=1}^{\frac{n}{4}} u^{j^2} \leq u + \sum_{j \geq 1} u^{2j} \leq 2u, \quad \forall k \geq n^2.$$

– Si $\frac{n}{4} < j \leq \frac{n-1}{2}$, on pose $l = \frac{n-1}{2} - j$, ce qui donne :

$$\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) = -\cos\left(\left(l + \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{n}\right), \text{ et encore :}$$

$$\sum_{\frac{n}{4} < j \leq \frac{n-1}{2}} \left[\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right]^{2k} \leq \sum_{0 \leq l < \frac{n}{4} - \frac{1}{2}} u^{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2} \leq 2u + e^{-\frac{k\pi^2}{n^2}}, \text{ ceci valant pour } k \geq n^2.$$

Finalement :

$$\forall n \geq 0,\ \forall k \geq n^2, \qquad \sum_{j=1}^{n-1} \left[\cos\left(\frac{2\pi m j}{n}\right)\right]^{2k} \leq 10\ e^{-\frac{k\pi^2}{n^2}}.$$

On en déduit ainsi le résultat avec $A = \sqrt{10}$ et $b = \frac{\pi^2}{2}$. □

Remarque. — Le terme $\left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^{2k}$ est prépondérant, les autres termes n'apportant qu'une compensation géométrique. Si n est pair, le calcul s'effectue de la même manière et on peut garder les mêmes constantes. Dans la somme à majorer, le taux de convergence en $e^{-\frac{k\pi^2}{n^2}}$ s'obtient dès que l'on enlève les χ tels que $|\hat{\mu}(\chi)| = 1$. H a été choisi le plus grand possible parmi les sous-groupes de G permettant "d'enlever ces 1". La présence d'un 1 donné par un caractère non trivial est à l'origine de la non-convergence en loi de la marche aléatoire dans le cas n pair.

Corollaire 1.3
Soit $f\colon S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$, centrée et $\frac{p}{q}$ irréductible. Soit H choisi comme dans le théorème précédent en fonction de la parité de q. Si $M_H f = 0$, alors :

$$\forall k \geq q^2, \ \left\| P_{\frac{p}{q}}^k f \right\|_\infty \leq \|f\|_\infty A e^{-b\frac{k}{q^2}}.$$

Remarque. — On peut augmenter la constante A de manière à ce que l'inégalité soit vraie pour tout k, mais en fait on aura toujours besoin de $k \geq q^2$.

2 Marche avec un angle irrationnel.

On fixe α irrationnel dans $]0,1[$. Nous utiliserons les opérateurs introduits précédemment, à savoir M_H, P_α et pour $(p,q) = 1$, $P_{\frac{p}{q}}$. La convergence en loi de la marche associée à α implique que $P_\alpha^k f \longrightarrow \int f$ pour toute fonction f continue. Nous allons voir que si l'on suppose f un peu plus régulière, on peut obtenir des vitesses de convergence pour certaines classes de fonctions selon la nature de l'angle.

2.1 Rappels de théorie des nombres.

2.1.1 Fractions continues.

Tout irrationnel α admet un développement en fraction continue unique : (a_n). On note $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$, la suite des réduites associée à ce développement. Elle vérifie les relations de récurrence suivantes :

$$p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1} \text{ et } q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}. \text{ Nous utiliserons aussi :}$$
$$\forall n \geq 1, \ \frac{1}{q_n + q_{n+1}} \leq |q_n\alpha - p_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}} \text{ et } p_n q_{n-1} - p_{n-1}q_n = (-1)^n.$$

Les réduites réalisent la suite des meilleures approximations successives de α. Ainsi, si une fraction approche α, la réduite à dénominateur immédiatement inférieur est "meilleure". Il faut attendre la réduite suivante pour que le résultat s'améliore.

2.1.2 Type d'un irrationnel.

Pour x réel, on note $((x))$ sa distance à $\mathbb{Z}$. Les irrationnels α de $]0,1[$ sont classés par rapport au comportement de la suite $((q\alpha))$. On dit que α est de type η si :

$$\eta = \sup\left\{t \geq 0, \liminf\left[q^t((q\alpha))\right] = 0\right\}.$$

En considérant $\frac{p_n}{q_n}$ une réduite de α, on trouve que $((q_n\alpha)) \geq \frac{1}{q_n}$. Ainsi, le type d'un irrationnel est toujours ≥ 1. On peut démontrer par ailleurs que, pour la mesure de Lebesgue, presque tout nombre est de type 1. C'est par exemple le cas des irrationnels algébriques sur $\mathbb{Q}$ ou encore de ceux dont le développement en fraction continue est borné.

2.2 Estimations de vitesses en norme $\| \ \|_\infty$.

2.2.1 Le calcul principal.

On note $\omega(f,\delta)$, l'oscillation de f sur les intervalles de longueur δ et $K(f)$ la constante de Hölder d'une fonction höldérienne de n'importe quel ordre s, avec $0 < s \leq 1$. Soit r un entier ≥ 0. On rappelle que $C^{r,s}$ désigne la classe des fonctions de classe C^r avec $f^{(r)}$ höldérienne d'ordre s.

Théorème 2.1
Soit $\frac{p}{q}$, irréductible avec $|q\alpha - p| = ((q\alpha))$. Si $f \in C^{r,s}\left(S^1, \mathbb{R}\right)$, alors :

$$\forall k \geq q^2, \ \left\| P_\alpha^{(r+1)k} f - \int f \right\|_\infty \leq \sum_{l=0}^{r} C_{r+1}^l \left\| f^{(l)} \right\|_\infty \varphi_1(q)^l (2Ae^{-\frac{bk}{2q^2}})^{(r+1-l)} + \varphi_1(q)^r \varphi_s(q) K\left(f^{(r)}\right),$$

où pour $t \in]0,1]$, on définit la famille de fonctions φ_t par : $\varphi_t(q) = \dfrac{4A}{1-e^{-b}}((q\alpha))^t + \dfrac{1}{q^t}$.

Preuve du théorème :
Pour simplifier, nous supposerons dans toute la suite que f est centrée ($\int f = 0$). La démonstration se fera en 2 étapes : nous traiterons d'abord le cas $r = 0$, c'est à dire f höldérienne d'ordre s, puis nous utiliserons le résultat obtenu pour en déduire le cas général.

Première étape.
Soit f, 1-périodique, telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq K(f)\,|x-y|^s$.
Une première remarque pour la suite est que les opérateurs $P_\alpha, P_{\frac{p}{q}}$ et M_H commutent entre eux.
Dans un premier temps, pour tout sous-groupe fini H de S^1, on peut écrire :

$$\left\| P_\alpha^k f \right\|_\infty \leq \left\| P_\alpha^k \left(f - M_H f\right) \right\|_\infty + \left\| P_\alpha^k \left(M_H f\right) \right\|_\infty.$$

On choisit H comme dans l'étude précédente, c'est à dire $H = \{\frac{k}{q}\}$ ou $H = \{\frac{2k}{q}\}$, suivant la parité de q. On a donc $|H| \geq \dfrac{q}{2}$. En utilisant le centrage de f (donc de $M_H P_\alpha^k f$), on obtient l'existence d'un point tel que $M_H P_\alpha^k f$ s'annule et ainsi :

$$\left\| P_\alpha^k \left(M_H f\right) \right\|_\infty = \left\| \left(M_H\left(P_\alpha^k f\right)\right) \right\|_\infty \leq \omega\left(P_\alpha^k f, \frac{1}{2|H|}\right) \leq \frac{K\left(P_\alpha^k f\right)}{q^s}.$$

On pose ensuite $g = f - M_H f$ et on cherche à majorer $\left\| P_\alpha^k g \right\|_\infty$, en s'appuyant sur l'étude menée précédemment dans le cas des groupes finis. Pour cela, on suppose $k \geq q^2$ et on effectue la division euclidienne $k = rq^2 + u$, $u < q^2$. Il en résulte :

$$\left\| P_\alpha^k g \right\|_\infty \leq \left\| P_\alpha^{rq^2} g \right\|_\infty \leq \left\| P_{\frac{p}{q}}^{rq^2} g \right\|_\infty + \left\| P_\alpha^{rq^2} g - P_{\frac{p}{q}}^{rq^2} g \right\|_\infty.$$

– En utilisant les résultats des paragraphes précédents et le fait que $r \geq \frac{k}{2}$, on obtient pour le premier terme :

$$\left\| P_{\frac{p}{q}}^{rq^2} g \right\|_\infty \leq A \left\| g \right\|_\infty e^{\frac{-bk}{2q^2}}.$$

– Considérons le second terme. On peut effectuer la décomposition suivante :

$$\left\| P_\alpha^{rq^2} g - P_{\frac{p}{q}}^{rq^2} g \right\|_\infty \leq \left\| P_{\frac{p}{q}}^{(r-1)q^2} \left(P_\alpha^{q^2} g - P_{\frac{p}{q}}^{q^2} g \right) \right\|_\infty + \left\| P_\alpha^{q^2} \left(P_\alpha^{(r-1)q^2} g - P_{\frac{p}{q}}^{(r-1)q^2} g \right) \right\|_\infty.$$

Or, toujours en se servant des résultats précédents :

$$\left\| P_{\frac{p}{q}}^{(r-1)q^2} \left(P_\alpha^{q^2} g - P_{\frac{p}{q}}^{q^2} g \right) \right\|_\infty \leq Ae^{-b(r-1)} \left\| P_\alpha^{q^2} g - P_{\frac{p}{q}}^{q^2} g \right\|_\infty.$$

Ainsi :

$$\left\| P_\alpha^{rq^2} g - P_{\frac{p}{q}}^{rq^2} g \right\|_\infty \leq Ae^{-b(r-1)} \left\| P_\alpha^{q^2} g - P_{\frac{p}{q}}^{q^2} g \right\|_\infty + \left\| P_\alpha^{(r-1)q^2} g - P_{\frac{p}{q}}^{(r-1)q^2} g \right\|_\infty.$$

En itérant le procédé, on en déduit facilement :

$$\left\|P_\alpha^{rq^2}g - P_{\frac{p}{q}}^{rq^2}g\right\|_\infty \le A\left(\sum_{s=0}^{r-1} e^{-bs}\right)\left\|P_\alpha^{q^2}g - P_{\frac{p}{q}}^{q^2}g\right\|_\infty .$$

Maintenant, pour k quelconque, on a :

$$\left(P_\alpha^k g - P_{\frac{p}{q}}^k g\right)(x) = E_x\left[f\left(\alpha\sum_{l=1}^k X_l\right) - f\left(\frac{p}{q}\sum_{l=1}^k X_l\right)\right],$$

en utilisant la suite des pas $(X_k)_{k\ge 1}$, associée à l'opérateur T défini dans l'introduction. D'où, la majoration :

$$\begin{aligned}\left\|P_\alpha^k g - P_{\frac{p}{q}}^k g\right\|_\infty &\le 2K(f)\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|^s \sup_x E_x\left|X_1 + \cdots + X_k\right|^s \\ &\le 2K(f)\left(\sqrt{k}\right)^s\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|^s E_0\left|\frac{X_1 + \cdots + X_k}{\sqrt{k}}\right|^s\end{aligned}$$

Or,

$$E_0\left|\frac{X_1 + \cdots + X_k}{\sqrt{k}}\right|^s \le 1 + E_0\left|\frac{X_1 + \cdots + X_k}{\sqrt{k}}\right|^2 \le 2.$$

Ainsi, en combinant les résultats précédents :

$$\left\|P_\alpha^{q^2}g - P_{\frac{p}{q}}^{q^2}g\right\|_\infty \le 4K(f)\left((q\alpha)\right)^s \text{ et :}$$

$$\left\|P_\alpha^{rq^2}g - P_{\frac{p}{q}}^{rq^2}g\right\|_\infty \le \left(\frac{4A}{1-e^{-b}}\right)K(f)\left((q\alpha)\right)^s .$$

En définitive :

$$\forall k \ge q^2,\ \left\|P_\alpha^k f\right\|_\infty \le K(f)\left[\left(\frac{4A}{1-e^{-b}}\right)\left((q\alpha)\right)^s + \frac{1}{q^s}\right] + 2A\left\|f\right\|_\infty e^{-b\frac{k}{2q^2}}.$$

Remarque. — On peut améliorer une des constantes du premier terme, dans le cas où f est lipschitzienne. En effet, à la fin du calcul, on peut écrire la majoration explicite suivante :

$$\begin{aligned}\left\|P_\alpha^k g - P_{\frac{p}{q}}^k g\right\|_\infty &\le 2K(f)\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|\frac{1}{2^k}\left(\sum_{|n|\le k, n+k\in 2\mathbb{N}} |n| C_k^{\frac{k+n}{2}}\right) \\ &\le 2K(f)\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|\frac{1}{2^k}\left(\sum_{n=0}^k |2n-k| C_k^n\right).\end{aligned}$$

Un résultat prouvé en annexe montre que : $\displaystyle\frac{1}{2^k}\sum_{n=0}^k |2n-k|C_k^n \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{k}.$

Remarque. — Si f est höldérienne d'ordre s, alors $\|M_H f\|_\infty \le \dfrac{2^s}{s+1}K(f)\dfrac{1}{q^s}$, en soustrayant la valeur de son intégrale à $M_H f$. C'est un peu meilleur mais cela alourdit les notations.

Deuxième étape.

On suppose désormais $r > 0$. Pour $0 \leq l < r$, on remarque tout d'abord que $K(f^{(l)}) = \left\| f^{(l+1)} \right\|_\infty$, ainsi que :

$$\forall k \geq q^2, \ \left\| P_\alpha^k f^{(l)} \right\|_\infty \leq \varphi_1(q) \left\| f^{(l+1)} \right\|_\infty + \left\| f^{(l)} \right\|_\infty (2A) e^{-\frac{bk}{2q^2}}.$$

Par récurrence sur $0 \leq l \leq r$, en remplaçant à chaque étape f par $P_\alpha^k f$ et en itérant la formule du dessus à l'aide des formules classiques des cœfficients du binôme, on arrive à :

$$\forall k \geq q^2, \ \left\| P_\alpha^{rk} f \right\|_\infty \leq \sum_{l=0}^{r} C_r^l \left\| f^{(l)} \right\|_\infty \varphi_1(q)^l (2A)^{(r-l)} e^{-\frac{bk}{2q^2}(r-l)}.$$

On remplace ensuite f par $P_\alpha^k f$ et on utilise l'inégalité de la première étape appliquée à $P_\alpha^k f^{(r)}$, qui est höldérienne d'ordre s, pour obtenir finalement le résultat. $\square$

2.2.2 Cas particulier d'un développement en fraction continue borné.

Théorème 2.2
Si le développement en fraction continue de α est borné, alors :
1) Pour $f \in C^{r,s}\left(S^1, \mathbb{R}\right)$, avec $r \geq 0$ et $s > 0$:

$$\left\| P_\alpha^k f - \int f \right\|_\infty = O\left(\frac{1}{k^{\frac{r+s}{2}}} \right).$$

2) Pour $f \in C^r\left(S^1, \mathbb{R}\right)$, avec $r \geq 0$:

$$\left\| P_\alpha^k f - \int f \right\|_\infty = o\left(\frac{1}{k^{\frac{r}{2}}} \right).$$

Preuve du théorème :
1) Choisissons une constante $c \geq 1$ telle que $(2A)^{r+1} e^{-\frac{bc(r+1)}{2}} \leq \dfrac{1}{2m^{\frac{r+s}{2}}}$, où $m = r + 2$.
Pour tout k, il existe un q_n, dénominateur de l'une des réduites de α tel que :

$$cq_n^2 \leq k \leq cq_{n+1}^2 \leq (M+1)^2 cq_n^2,$$

où M est une borne des cœfficients du développement en fraction continue de α. Nous utilisons également le fait que $((q_n \alpha)) \leq \frac{1}{q_n}$. En remplaçant f par $P_\alpha^k f$ dans l'inégalité générale, nous obtenons (en supposant toujours f centrée) :

$$\begin{aligned}
\left\| P_\alpha^{mk} f \right\|_\infty &\leq \sum_{l=1}^{r} C_{r+1}^l \left\| P_\alpha^k f^{(l)} \right\|_\infty \left(\frac{(M+1)\sqrt{c}}{\sqrt{k}} \right)^l \left(\frac{4A}{1 - e^{-b}} + 1 \right)^l (2Ae^{-\frac{bc}{2}})^{(r+1-l)} \\
&+ \left\| P_\alpha^k f \right\|_\infty \frac{1}{2m^{\frac{r+s}{2}}} + \left(\frac{4A}{1 - e^{-b}} + 1 \right)^{r+1} \left(\frac{(M+1)\sqrt{c}}{\sqrt{k}} \right)^{r+s} K\left(f^{(r)} \right),
\end{aligned}$$

le premier terme étant nul dans le cas où $r = 0$. Si $r > 0$, le résultat se démontre par récurrence sur les dérivées de f, en utilisant le fait que pour $l \geq 1$, $\left\| P_\alpha^k f^{(l)} \right\|_\infty = O\left(\frac{1}{k^{\frac{r+s-l}{2}}} \right)$. Dans tous les cas, il existe une constante C telle que :

$$\left\| P_\alpha^{mk} f \right\|_\infty \leq \frac{C}{k^{\frac{r+s}{2}}} + \left\| P_\alpha^k f \right\|_\infty \frac{1}{2m^{\frac{r+s}{2}}}.$$

On s'intéresse alors aux k de la forme m^l. On a alors :

$$\begin{aligned}
\left\|P_\alpha^{m^l} f\right\|_\infty &\leq \frac{C}{m^{l\frac{r+s}{2}}} + \frac{1}{2m^{\frac{r+s}{2}}} \left\|P_\alpha^{m^{l-1}} f\right\|_\infty \\
&\leq \frac{C}{m^{l\frac{r+s}{2}}} \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{l-1}}\right] + \frac{1}{2^l m^{l\frac{r+s}{2}}} \|P_\alpha f\|_\infty \\
&\leq \left(2C + \frac{\|f\|_\infty}{2^l}\right) \frac{1}{m^{l\frac{r+s}{2}}} \leq (2C + \|f\|_\infty) \frac{1}{k^{\frac{r+s}{2}}}.
\end{aligned}$$

Pour un k quelconque, pour un certain l, on aura : $m^l \leq k < m^{l+1}$ et ainsi :

$$\left\|P_\alpha^k f\right\|_\infty \leq \left\|P_\alpha^{m^l} f\right\|_\infty \leq (2C + \|f\|_\infty) \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{r+s}{2}}.$$

2) Le résultat est vrai si $r = 0$, par définition de la convergence en loi, mais on peut également le voir par approximation par des fonctions plus régulières. On suppose donc $r > 0$. On applique alors la formule générale et l'on arrive à :

$$\begin{aligned}
\left\|P_\alpha^{mk} f\right\|_\infty &\leq \sum_{l=1}^{r} C_r^l \left\|P_\alpha^k f^{(l)}\right\|_\infty \left(\frac{(M+1)\sqrt{c}}{\sqrt{k}}\right)^l \left(\frac{4A}{1-e^{-b}} + 1\right)^l (2Ae^{-\frac{bc}{2}})^{(r-l)} \\
&+ \left\|P_\alpha^k f\right\|_\infty \frac{1}{2m^{\frac{r+s}{2}}},
\end{aligned}$$

On raisonne encore par récurrence, ainsi il existe une fonction ψ croissant vers $+\infty$ telle que :

$$\left\|P_\alpha^{mk} f\right\|_\infty \leq \frac{1}{\psi(k) k^{\frac{r}{2}}} + \left\|P_\alpha^k f\right\|_\infty \frac{1}{2m^{\frac{r}{2}}}.$$

De la même manière, en s'intéressant aux m^l, on obtient le résultat souhaité en remarquant que :

$$\frac{1}{\psi(m^l)} + \frac{1}{2\psi(m^{l-1})} + \cdots + \frac{1}{2^{l-1}\psi(m)} = o(1).$$

□

2.2.3 Cas d'un angle de type η fini.

Théorème 2.3
Si α est de type η fini et si $f \in C^{r,s}(S^1, \mathbb{R})$ avec $r \geq 0$ et $s \geq 0$ alors:

$$\forall \varepsilon, \ \left\|P_\alpha^k f - \int f\right\|_\infty = O\left(\frac{1}{k^{\frac{r+s}{2\eta} - \varepsilon}}\right).$$

Preuve du théorème :
En s'intéressant au réel x minimisant $\frac{1}{x} + e^{-\frac{1}{x^2}}$, on est amené à considérer la fonction $\sqrt{\frac{ck}{\log k}}$, où $c = \frac{b^2}{2}$. Nous allons situer cette fonction par rapport aux (q_n), dénominateurs des réduites de α :

$$\forall k, \ \exists q_n, \text{ tel que } q_n \leq \sqrt{\frac{ck}{\log k}} < q_{n+1}.$$

En reportant dans l'inégalité générale de 2.2.1, on obtient :

$$e^{-\frac{b^2}{2}\frac{k}{q_n^2}(r+1-l)} \leq \left(\frac{\log k}{k}\right)^{r+1-l}.$$

Il ne reste plus qu'à estimer les $\varphi_t(q_n)$. On a tout d'abord :

$$\forall t \geq 0,\ \varphi_t(q_n) \leq \left(\frac{4A}{1-e^{-b}}+1\right)\frac{1}{q_n^t}.$$

On utilise alors l'hypothèse sur η, ainsi :

$$\forall \varepsilon,\ \exists c > 0, \text{ tel que } q_n^{\eta+\varepsilon}((q_n\alpha)) \geq c.$$

Or, $((q_n\alpha)) \leq \dfrac{1}{q_{n+1}}$, donc $q_{n+1} \leq \dfrac{1}{c} q_n^{\eta+\varepsilon}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_n} &\leq C_2\left(\frac{\log k}{k}\right)^{\frac{1}{2(\eta+\varepsilon)}} \\ &\leq C_3\frac{1}{k^{\frac{1}{2\eta}-\varepsilon}}, \text{ en changeant de } \varepsilon. \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'inégalité initiale, on obtient finalement le résultat. □

Remarque. — Toujours en considérant l'inégalité générale de 2.2.1, on peut effectuer un développement de $\sqrt{\frac{ck}{\log k}}$ en base (q_n) :

$$\sqrt{\frac{ck}{\log k}} = b_{n(k)}(k)q_{n(k)} + \cdots + b_0(k)q_0 + \varepsilon(k), \text{ où :}$$

$0 \leq b_l \leq a_l - 1$ pour $0 \leq l \leq n(k)$ et $b_{n(k)}(k) \neq 0$, $\varepsilon(k) \in [0,1[$. Il en résulte alors :

Théorème 2.4
Pour tout angle α, il existe une suite (k_n) telle que :

$$\left\| P_\alpha^{k_n} f - \int f \right\|_\infty = O\left(\frac{\log k_n}{k_n}\right)^{\frac{r+\varepsilon}{2}}.$$

2.3 Minorations.

Nous allons voir que les ordres de grandeur obtenus dans les paragraphes précédents sont optimaux. Nous utiliserons la théorie des séries de Fourier pour construire des exemples de minoration. Nous allons commencer par un calcul direct pour illustrer les problèmes que soulèvent cette "voie".

2.3.1 Un calcul direct sur la série de Fourier.

Soit $f \in C^0(S^1,\mathbb{R})$. On note (c_n) ses cœfficients de Fourier. On suppose en outre que f est centrée ($c_0 = 0$) et que $\sum |c_n| < \infty$.

Ainsi f s'écrit $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi nx}$ et donc : $P_\alpha^k f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi nx}(\cos 2\pi n\alpha)^k$.

En prenant $q = q_r$, un dénominateur de réduite mais de l'angle 2α cette fois (ce sont les valeurs de $((2\alpha))$ proches de 1 et de -1 qui posent problème) :

$$\left\| P_\alpha^k f - \int f \right\|_\infty \leq \sum_{|n|<q_r} |c_n||\cos 2\pi n\alpha|^k + \sum_{|n|\geq q_r} |c_n|$$

Si $|n| < q_r$, alors $((2n\alpha)) \geq ((2q_{r-1}\alpha)) \geq \dfrac{1}{q_{r-1}+q_r} \geq \dfrac{1}{2q_r}$, donc $|\cos 2\pi n\alpha|^k \leq e^{-\frac{\pi^2 k}{8q_r^2}}$.

Finalement :

$$\left\| P_\alpha^k f - \int f \right\|_\infty \leq \left(\sum |c_n| \right) e^{-\frac{\pi^2 k}{8 q_r^2}} + \sum_{|n| \geq q_r} |c_n|.$$

On cherche alors des fonctions pour lesquelles on a un renseignement sur le 2^e terme.

– Si f est höldérienne d'ordre s avec $s > \frac{1}{2}$, on a (cf annexe) :

$\sum_{|n| \geq p} |c_n| \leq \frac{K(f)}{\left(2^s - 2^{\frac{1}{2}}\right)} \left(\frac{1}{p^{s-\frac{1}{2}}} \right)$, d'où : $\left\| P_\alpha^k f - \int f \right\|_\infty \leq C(f,\alpha) \left[\left(\frac{1}{q_r} \right)^{s-\frac{1}{2}} + e^{-\frac{\pi^2 k}{8 q_r^2}} \right]$.

– Si f est de classe C^m, $m \geq 1$ avec $\sum n^m |c_n| < \infty$, alors :

$$\left\| P_\alpha^k f - \int f \right\|_\infty \leq \left(\frac{1}{q_r} \right)^m \sum_{|n| \geq q_r} |n|^m |c_n| + e^{-\frac{\pi^2 k}{8 q_r^2}} \leq \left(1 + \sum |n|^m |c_n| \right) \left[\left(\frac{1}{q_r} \right)^m + e^{-\frac{\pi^2 k}{8 q_r^2}} \right].$$

En encadrant un certain multiple de $\sqrt{\frac{k}{\log k}}$ par les $q_n(2\alpha)$, on obtient les résultats suivants :

Théorème 2.5
Si 2α a un développement en fraction continue borné, alors :
1) Si $f \in C^{0,s}(S^1, \mathbb{R})$, avec $s > \frac{1}{2}$:

$$\left\| P_\alpha^k f - \int f \right\|_\infty = O\left(\frac{\log k}{k} \right)^{\frac{s}{2} - \frac{1}{4}}.$$

2) Sif est de classe $C^m(S^1, \mathbb{R})$, $m \geq 1$, avec $\sum |n|^m |c_n| < \infty$:

$$\left\| P_\alpha^k f - \int f \right\|_\infty = O\left(\frac{\log k}{k} \right)^{\frac{m}{2}}.$$

Remarque. — Les résultats obtenus sont moins bons que ceux trouvés auparavant. La méthode d'approximation que nous avons développée est particulièrement performante dans les cas où f n'est pas excessivement régulière, c'est à dire seulement höldérienne. Elle évite la manipulation des cœfficients de Fourier de f, qui est, dans ces cas-là, assez délicate.

2.3.2 Exemples de minoration pour les types d'angles rencontrés.

Théorème 2.6
Soit r un entier ≥ 0 et $0 < s < 1$. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ croissant vers $+\infty$. Alors il existe $f \in C^{r,s}(S^1, \mathbb{R})$ et α dont le développement en fraction continue est borné tels que :

$$\exists (k_l), \ \left\| P_\alpha^{k_l} f - \int f \right\|_\infty \geq \frac{1}{k_l^{\frac{r+s}{2}} \varphi(k_l)}$$

Preuve du théorème :
On choisit α avec un développement en fraction continue constant > 2, ainsi :

$$\exists (a,b,C) > 0, \ \lambda > 2 \text{ tels que } a\lambda^n \leq q_n \leq b\lambda^n \text{ et } \frac{C}{q_n} \leq ((q_n \alpha)) \leq \frac{1}{q_n}.$$

Soit une suite (n_l) telle que $\sum \frac{1}{\varphi(n_l)} < +\infty$. Construisons f à partir de ses cœfficients de Fourier de la manière suivante :

$$c_n = 0, \text{ sauf } c_{q_{n_l}} = \frac{1}{q_{n_l}^{r+s} \varphi(n_l)}.$$

On rappelle alors le critère de Hardy portant sur les fonctions höldériennes :

$$f \in C^{0,s}(S^1,\mathbb{R}), \text{ avec } s \in]0,1[\text{ SSi } \sum_{j\geq 0} 2^{js}\left\|\Delta_j f\right\|_\infty < +\infty,$$

$$\text{où l'on a noté } f = \sum_{j\geq 0}\Delta_j f, \text{ avec } [\Delta_j f](x) = \sum_{|k|\in[2^j,2^{j+1}[} c_k e^{2i\pi kx}.$$

Nous appliquons ce critère à $f^{(r)}$. En effet, chaque q_{n_l} étant dans un unique intervalle $[2^{j_l},2^{j_l+1}[$, on obtient :

$$\left\|\Delta_{j_l} f^{(r)}\right\|_\infty = \frac{1}{q_{n_l}^s\varphi(n_l)} \leq \frac{1}{2^{j_l s}\varphi(n_l)}.$$

Pour $x>0$, assez petit, $\cos(x)\geq e^{-x^2}$, donc $\exists M_1>0$ tel que :

$$P_\alpha^k f(0) \geq M_1 \sum_{l\geq 1}\frac{1}{\lambda^{(r+s)n_l}\varphi(n_l)} e^{-\frac{C^2 k}{a^2\lambda^{2n_l}}}.$$

Il existe donc $M_2>0$ et $c>0$ tels que si pour tout l, $k_l = \lfloor \lambda^{2n_l}\rfloor$, on ait pour l assez grand :

$$P_\alpha^{k_l} f(0) \geq M_2 \frac{1}{k_l^{\frac{r+s}{2}}\varphi(c\log k_l)} \geq M_2\frac{1}{k_l^{\frac{r+s}{2}}\varphi(k_l)}.$$

$\square$

Remarque. — Pour une fonction f de classe C^r, $r\geq 0$, on obtient le même type de résultat en choisissant $c_{q_{n_l}} = \dfrac{1}{q_{n_l}^{r+s}\varphi(n_l)}$. En ce qui concerne les angles de type η quelconque >1 :

En considérant l'angle dont le développement en fraction continue est défini par récurrence par $a_{n+1} = \lfloor q_n^{\eta-1}\rfloor$ (avec des conditions initiales arbitraires), qui est exactement de type η et en se servant de la même fonction que celle utilisée plus haut, on obtient une minoration en

$$\sum_{l\geq 1}\frac{1}{q_{n_l}^{(r+s)}\varphi(n_l)} e^{-\frac{C^2 k}{q_{n_l+1}^2}}.$$

Ainsi on obtient, avec $k_l = \lfloor q_{n_l+1}^2\rfloor$, l'existence d'un $M>0$ tel que, pour l assez grand :

$$P_\alpha^{k_l} f(0) \geq M\frac{1}{k_l^{\frac{r+s}{2\eta}}\varphi(k_l)}.$$

2.3.3 Un résultat de minoration pour des fonctions quelconques.

Théorème 2.7

Soit f continue mais qui n'est pas un polynôme trigonométrique. Si on se fixe une fonction ψ, arbitraire, tendant vers 0 et une suite d'entiers (l_i), alors il existe un angle α et des plages de longueur (l_i) sur lesquelles la suite $\left\|P_\alpha^k f - \int f\right\|_\infty$ est minorée par ψ. Si f est un polynôme trigonométrique, alors la convergence est exponentielle pour tout angle.

Preuve du théorème :

– Si f est un polynôme trigonométrique, alors f s'écrit $f(x) = \sum_{|n|\leq N} C_n e^{2i\pi nx}$.

Comme $P_\alpha\left(e^{2i\pi n\cdot}\right) = \cos(2\pi n\alpha)e^{2i\pi n\cdot}$, on obtient : $P_\alpha^k f(x) = \sum_{|n|\leq N} C_n e^{2i\pi nx}\left(\cos 2\pi n\alpha\right)^k$.

Il est alors immédiat que : $\left\|P_\alpha^k f - \int f\right\|_\infty \leq \left(\sum_{|n|\leq N}|C_n|\right) e^{-\frac{\pi^2 k}{2}\inf_{|n|\leq N}\{((2n\alpha))^2\}}$.

– Si f n'est pas un polynôme trigonométrique, alors quitte à raisonner avec $f(-x)$, on suppose qu'il existe une suite (r_n) tendant vers l'infini telle que $C_{r_n}\neq 0$. En nous fixant une fonction ψ décroissante vers 0, nous allons construire pas à pas le développement en fraction continue d'un angle solution. Supposons l'avoir fait jusqu'au rang n et construisons la suite du développement.

Lemme 2.8
Soit (n_r) une suite d'entiers tendant vers l'infini et deux réels u et v tels que $0 < u < v < 1$. Alors, il existe $r(u,v)$ tel que l'on ait : $\forall r \geq r(u,v)$, $\exists l_r$, $u \leq \dfrac{l_r}{n_r} \leq v$ et $(l_r, n_r) = 1$.

Preuve du lemme :
On établit le résultat en démontrant que de toute sous-suite on peut extraire une nouvelle sous-suite telle que le résultat soit vrai. Lors de chaque extraction, on gardera la même notation.
On écrit $n_r = p_1^{\alpha_1^r} \cdots p_{i_r}^{\alpha_{i_r}^r}$, $\alpha_{i_r}^r \geq 1$, où (p_n) est la suite des nombres premiers.
– S'il existe une extraction telle que $p_{i_r} \to +\infty$ et $\frac{un_r}{p_{i_r+1}} \geq 1$, on se place dessus.
Pour r assez grand, on aura, $\forall k \geq 1$: $\dfrac{un_r}{p_{i_r+k}} \geq 1 \Rightarrow \dfrac{vn_r}{p_{i_r+k+1}} \geq 1$.
En effet, si la première condition est vérifiée :

$$\frac{vn_r}{p_{i_r+k+1}} \geq \frac{v}{u}\frac{p_{i_r+k}}{p_{i_r+k+1}}.$$

On rappelle que $p_n \sim n \log n$, donc $\frac{p_{i_r+k}}{p_{i_r+k+1}} \underset{r\infty}{\longrightarrow} 1$. Le résultat vient du fait que $v > u$.
Il en résulte ainsi, puisque $p_{i_r+k} \underset{k\infty}{\longrightarrow} +\infty$, qu'il existe $k(r)$ tel que :

$$\frac{un_r}{p_{i_r+k(r)+1}} \leq 1 \leq \frac{vn_r}{p_{i_r+k(r)+1}}, \text{ c'est à dire : } u \leq \frac{p_{i_r+k(r)+1}}{n_r} \leq v.$$

– Si $p_{i_r} \longrightarrow +\infty$ et si $n_r = k_r p_{i_r}$, avec $k_r < M$. Pour r assez grand, on prendra l_r de la forme $k(r)p_1 \cdots p_M + 1$ et dans l'intervalle $]u + \left(\frac{v-u}{4}\right), v - \left(\frac{v-u}{4}\right)[$. Si l_r a un facteur commun avec n_r, ce ne peut être que p_{i_r}. Ce dernier tendant vers l'infini, on prendra $k(r)p_1 \cdots p_M - 1$.
– Si $p_{i_r} < p_{j_0}$, on prendra l_r de la forme $l_r = k(r)p_1 \cdots p_{j_0} + 1$, pour r assez grand. □

Fin de la preuve du théorème.
L'ensemble des $\alpha \in]0,1[$ ayant $\frac{p_n}{q_n}$ pour réduite est un intervalle ouvert non vide. Grâce au lemme, on peut choisir r assez grand, tel que :
– $C_r \neq 0$.
– $\exists \frac{l_r}{r}$, irréductible et dans cet intervalle ouvert.
Ainsi, une des réduites de $\frac{l_r}{r}$ est $\frac{p_n}{q_n}$ et pour un certain indice, on aura $\frac{l_r}{r} = \frac{p_{n+n_0}}{q_{n+n_0}}$, avec égalité des numérateurs et des dénominateurs. On prend le développement de $\frac{l_r}{r}$ comme début de celui de α. Nous allons désormais choisir a_{n+n_0+1}. On a tout d'abord :

$$P_\alpha^k f = M_H\left(P^k_{\frac{p_{n+n_0}}{q_{n+n_0}}} f\right) + P^k_{\frac{p_{n+n_0}}{q_{n+n_0}}}\left(f - M_H f\right) + P_\alpha^k f - P^k_{\frac{p_{n+n_0}}{q_{n+n_0}}} f.$$

H étant $\{l\frac{p_{n+n_0}}{q_{n+n_0}}\}$ si q_{n+n_0} est impair et $\{2l\frac{p_{n+n_0}}{q_{n+n_0}}\}$ si q_{n+n_0} est pair. $M_H\left(P^k_{\frac{p_{n+n_0}}{q_{n+n_0}}} f\right)$ vaut :

– $M_H f(x)$ dans le premier cas.
– $M_H f(x)$ si k est pair, $M_H f(x + \frac{1}{q_{n+n_0}})$ si k est impair, dans le second cas.

Dans tous les cas :

$$\left\|P_\alpha^k f\right\|_\infty \geq \|M_H f\|_\infty - 2A\|f\|_\infty e^{-b\frac{k}{q^2_{n+n_0}}} - \omega\left(f, \frac{k}{q_{n+n_0}q_{n+n_0+1}}\right).$$

Si $\|M_H f\|_\infty > 0$, le premier terme d'erreur est arbitrairement petit pour k assez grand. Il suffit ensuite de prendre a_{n+n_0+1} assez grand pour obtenir le résultat. Le développement de α sera ainsi déterminé jusqu'au rang $n + n_0 + 1$. Pour terminer, on remarque que cette condition de stricte positivité résulte du fait que $C_r \neq 0$. En effet :

$$C_r = \int_0^1 e^{-2i\pi rx} f(x)\, dx = \int_0^1 e^{-2i\pi rx}\left(M_H f\right)(x)\, dx, \text{ car } r = q_{n+n_0}.$$ □

Remarque. — Considérant le théorème final de 2.2.3 qui impose d'avoir une sous-suite avec un taux de décroissance indépendant de α, le théorème que l'on vient de voir est en quelque sorte optimal.

3 Comparaison avec d'autres méthodes.

A l'heure actuelle, il y a assez peu de littérature sur le sujet et c'est plutôt le point de vue des lois qui est privilégié. A cet effet, nous introduisons la distance en discrépance entre deux probabilités P et Q sur le cercle. C'est par définition :

$$D(P,Q) = \sup_{J \subseteq S^1} |P(J) - Q(J)|, \text{ pour } J \text{ intervalle de } S^1.$$

Avec $Q = U$, la loi uniforme, elle mesure la distribution de P sur le cercle. La discrépance est liée à l'espace des fonctions à variation finie. On note $\delta(P,Q) = \sup_{f,\ \mathrm{var}(f) \leq 1} |P(f) - Q(f)|$.

Proposition 3.1
Soient P et Q deux probabilités sur le cercle, alors :

$$\delta(P,Q) \leq D(P,Q) \leq 2\delta(P,Q).$$

Preuve de la proposition :
La fonction f définit une intégrale de Stieltjes et ainsi :

$$\begin{aligned} P(f) = \int_0^1 f(t)P(dt) &= \int_0^1 \int_0^1 1_{]0,t]}(s)df(s)P(dt) \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 1_{[s,1]}(t)P(dt) \right) df(s) \\ &= \int_0^1 P([s,1])df(s). \end{aligned}$$

Donc $|P(f) - Q(f)| \leq D(P,Q)\ \mathrm{var}(f)$. La première inégalité en résulte. La 2^e est une conséquence du fait que l'indicatrice d'un intervalle (non vide) est de variation 2. □

Remarque. — Si f est lipschitzienne, alors $\mathrm{var}(f) \leq K(f)$.
Remarque. — On note μ la probabilité sur S^1 telle que $\mu(\pm\alpha) = \frac{1}{2}$. Si f est à variation finie :

$$\left\| P_\alpha^k f - \int f \right\|_\infty \leq D(\mu^{*k}, U)\mathrm{var}(f).$$

En se référant à [3], un calcul direct montre qu'il existe $c > 0$ telle que : $D(\mu^{*k}, U) \geq \dfrac{c}{\sqrt{k}}$.

3.1 Utilisation de [3].

C'est un article de F. Su datant de septembre 1998. Pour majorer $D(\mu^{*k}, U)$, il cherche à exploiter une inégalité de Erdös-Turán sur les sommes exponentielles en s'appuyant sur une fine étude de la répartition des $((q\alpha))$. Les résultats sont les suivants :

Théorème 3.2
Si 2α est un irrationnel quadratique, alors $D(\mu^{*k}, U) = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

Si 2α a un développement en fraction continue borné, alors $D(\mu^{*k}, U) = O\left(\dfrac{\log k}{\sqrt{k}}\right)$.

Si 2α est de type η, alors $\forall \varepsilon$, $D(\mu^{*k}, U) = O\left(\dfrac{1}{k^{\frac{1}{2\eta} - \varepsilon}}\right)$.

On retrouve ainsi les résultats obtenus dans le cas d'une fonction lipschitzienne. On ne sait cependant pas si, dans le cas d'un développement borné, la majoration de $D(\mu^{*k}, U)$ est optimale.

3.2 Utilisation de l'inégalité de Koksma-Denjoy.

Nous allons voir que l'on peut retrouver la majoration en $O\left(\frac{\log k}{\sqrt{k}}\right)$ dans le cas d'un développement borné (par une constante M) en utilisant les inégalités suivantes (Denjoy-Koksma) :

3.2.1 Rappels.

Théorème 3.3
Si f est à variation finie et si $x_1, \cdots, x_N$ sont des réels de $[0,1]$ de discrépance D_N^*, alors :

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f(x)\ dx\right| \leq var(f) D_N^*,$$

avec $D_N^* = \sup_{0\leq t\leq 1}\left|\frac{A([0,t);N)}{N} - t\right|$ *où $A([0,t):N)$ est le nombre de x_i dans $[0,t)$.*

Preuve du théorème :
Nous donnons la démonstration dans le cas continu en nous référant à [2]. Notons $R_N(t) = \dfrac{A([0,t);N)}{N} - t$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 R_N(t) df(t) &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_0^1 1_{[0,t)}(x_n) df(t) - \int_0^1 t df(t) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[f(1) - f(x_n)] - f(1) + \int_0^1 f(t)\ dt \\
&= -\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) + \int_0^1 f(t)\ dt
\end{aligned}$$

Ainsi : $\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f(x)\ dx\right| \leq \mathrm{var}(f) D_N^*$. □

On en déduit le théorème fondamental suivant :

Théorème 3.4 *(Denjoy-Koksma)*
Soit $\frac{p}{q}$, irréductible avec $|q\alpha - p| = ((q\alpha)) < \frac{1}{q}$. Si f est à variation finie, centrée, alors :

$$\left|\sum_{k=0}^{q-1} f(x + k\alpha)\right| \leq var(f).$$

Preuve du théorème :
Il suffit d'écrire $k\alpha = k\frac{p}{q} + k\left(\alpha - \frac{p}{q}\right)$, où $|q\alpha - p| = ((q\alpha))$. $k\left(\alpha - \frac{p}{q}\right)$ est de signe constant et en valeur absolue $< \frac{1}{q}$. Comme $(p,q) = 1$, il y a exactement un $k\alpha (\text{mod } 1)$ dans chaque intervalle de la forme $[\frac{l}{q}, \frac{l+1}{q}[$. Ainsi la discrépance est $\leq \frac{1}{q}$ et il suffit d'appliquer l'inégalité précédente.

□

3.2.2 Application.

Comme il a déjà été fait, nous allons développer k en base q_n (relatifs à 2α), à savoir :

$$k = b_{n(k)}(k) q_{n(k)} + \cdots + b_0(k) q_0.$$

Ainsi, en utilisant une constante $C > 0$ qui deviendra générique par la suite :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{k-1} f(x+2n\alpha)\right| &\leq \operatorname{var}(f)(b_{n(k)}(k)+\cdots+b_0(k)) \\ &\leq \operatorname{var}(f) M n(k) \\ &\leq C\operatorname{var}(f)\log(k),\end{aligned}$$

Revenons maintenant au problème initial qui était de majorer $\left\|P_\alpha^k f\right\|_\infty$. Par décroissance de cette suite, il suffit de se limiter au cas pair qui s'écrit :

$$\begin{aligned}P_\alpha^{2k} f(x) &= \frac{1}{4^k}\sum_{|n|\leq k} C_{2k}^{k+n} f(x+2n\alpha) \\ &= \frac{1}{4^k}\left[C_{2k}^k f(x) + \sum_{n=1}^{k} C_{2k}^{k+n}\left(f(x+2n\alpha)+f(x-2n\alpha)\right)\right]\end{aligned}$$

Posons $S_l = \displaystyle\sum_{n=-l}^{l} f(x+2n\alpha)$. Après avoir effectué une transformation d'Abel, on arrive à :

$$P_\alpha^{2k} f(x) = \frac{1}{4^k}\left[\sum_{n=0}^{k} C_{2k}^{k+n}\left(\frac{2n+1}{k+n+1}S_n\right)\right].$$

Or $|S_n| \leq C\log n$, ainsi :

$$\left\|P_\alpha^{2k} f\right\|_\infty \leq \frac{C_{2k}^k}{4^k}\frac{1}{k+1}S_0 + \frac{C}{4^k}\sum_{n=1}^{k} C_{2k}^{k+n}\frac{n\log n}{k}.$$

Comme $\dfrac{1}{4^k}C_{2k}^k = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$, il suffit de s'intéresser à :

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{C_{2k}^{k+n}}{4^k} n\log n &\leq \frac{\log k}{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{C_{2k}^{k+n}}{4^k} n \\ &\leq C\frac{\log k}{k}\sqrt{k},\end{aligned}$$

en se référant à un calcul fait en annexe. On en déduit ainsi le résultat. □

Remarque. — Il est assez facile de minorer la somme précédente de logarithmes pondérés par une expression du même type. En effet :

$$\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{C_{2k}^{k+n}}{4^k} n\log n \geq \frac{1}{k}\frac{\log k}{A}U(k)$$

où $U(k) = \displaystyle\sum_{k^{\frac{1}{A}}\leq n\leq k}\frac{C_{2k}^{k+n}}{4^k} n$. On conclut en remarquant que $U(k) + \displaystyle\sum_{1\leq n<k^{\frac{1}{A}}}\frac{C_{2k}^{k+n}}{4^k} n \geq C\sqrt{k}$. Il suffit donc d'avoir choisi $A > 2$ (car le 2^e terme est $\leq k^{\frac{1}{A}}$) pour avoir le résultat.

4 Construction de contre-exemples au TCL.

Nous allons exploiter l'idée déjà vue de "concentration" de la loi sur un groupe fini. Rappelons que l'on note (S_k) la marche aléatoire standard sur $\mathbb{Z}$ avec sauts de ± 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$. Pour simplifier, nous nous bornerons à considérer une marche avec un départ en 0. On note alors E l'esp'erance E_0.

4.1 A propos du théorème de Brown sur le TCL.

– Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, il existe de nombreux théorèmes donnant un TCL lorsque α est "mal approché" par ses réduites. Une technique générale consiste à essayer d'appliquer le théorème de Brown sur les accroissements de martingale.
Pour cela, si f est dans $\mathbf{L}^2(S^1)$, on cherche à l'écrire $f = (I - P_\alpha)g$, avec g également dans $\mathbf{L}^2(S^1)$. On effectue alors la décomposition suivante :

$$\sum_{i=0}^{n} f(S_i\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} [g(S_{i+1}\alpha) - P_\alpha g(S_i\alpha)] + g\,(0) - P_\alpha g\,(S_n\alpha)\,.$$

La somme du membre de droite est une martingale et le terme résiduel se contrôle facilement.

– On peut remarquer que cette méthode fonctionne pour $\alpha = \frac{p}{q}$, $(p,q) = 1$. La résolution de $f = (I - P_\alpha)g$ s'effectue grâce aux cœfficients de Fourier. Toute fonction sur le sous-groupe $\left\{j\frac{p}{q}, j = 0, \cdots, q-1\right\}$ s'écrivant $f\left(j\frac{p}{q}\right) = \sum_{k=0}^{q-1} c_k e^{2i\pi k \frac{jp}{q}}$, on cherche g de la forme :

$$g\left(j\frac{p}{q}\right) = \sum_{k=0}^{q-1} d_k e^{2i\pi k \frac{jp}{q}}.$$

Or, $P_\alpha(e^{2i\pi k\frac{jp}{q}}) = \cos\left(2\pi\frac{p}{q}k\right) e^{2i\pi k\frac{jp}{q}}$, donc $d_k = \dfrac{c_k}{1 - \cos\left(2\pi\frac{p}{q}k\right)} = \dfrac{c_k}{2\sin^2\left(\pi\frac{p}{q}k\right)}$.

Ainsi on peut toujours trouver g permettant l'application du théorème de Brown. Notons que g s'écrit, en reprenant les vrais cœfficients de f, (C_k), et en remarquant que $d_0 = c_0 = 0$:

$$g\left(j\frac{p}{q}\right) = \sum_{k=1}^{q-1} \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} C_{k+lq}\right) \frac{1}{2\sin^2\left(\pi\frac{p}{q}k\right)} e^{2i\pi k\frac{p}{q}j}.$$

On se servira de cette expression un peu plus loin, lors d'un calcul explicite.

4.2 Exemple de fonction C^1 centrée et d'angle α ne vérifiant pas le TCL.

Soit f, la fonction C^1 de cœfficients de Fourier : $c_0 = 0$, et $c_n = c_{-n} = \frac{1}{|n|^3}$ pour $n \neq 0$.
Nous allons construire maintenant pas à pas le développement en fraction continue de α.

On considère :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} f(S_k\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}\left[f(S_k\alpha) - f\left(S_k\frac{p}{q}\right)\right] && (1)\\
&+ \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}\left[f\left(S_k\frac{p}{q}\right) - \frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} f\left(\frac{j}{q}\right)\right] && (2)\\
&+ \sqrt{N}\frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} f\left(\frac{j}{q}\right) && (3)
\end{aligned}$$

Nous allons majorer successivement les 3 termes du second membre de cette égalité. On suppose avoir construit la réduite $\frac{p_r}{q_r}$ de α et que plus haut : $p = p_r$ et $q = q_r$.
– D'une part, on majore brutalement (1) :

$$|(1)| \leq N\sqrt{N}K(f)\left|\alpha - \frac{p_r}{q_r}\right| \leq \frac{K(f)N\sqrt{N}}{q_r q_{r+1}}.$$

– D'autre part, en notant (c_k), les coefficients de Fourier de f, on a $(3) = \sqrt{N}\sum_{r\in\mathbb{Z}} c_{rq_r}$.

– Considérons l'événement $\mathcal{E} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f(S_k \alpha) \geq 0 \right\}$. On choisit $M \geq 2\sigma_r$, où :

$$\sigma_r^2 = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} E \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} \left[f(S_k \frac{p_r}{q_r}) - \frac{1}{q_r} \sum_{j=0}^{q_r - 1} f\left(\frac{j}{q_r}\right) \right] \right)^2 \right].$$

Le TCL dans le cas discret nous indique que :

$$\lim_{N \to \infty} P\{(2) \geq -M\} = \int_{-\frac{M}{\sigma_r}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

Il en résulte :

$$\exists N_0, \forall N \geq N_0 \quad P\{(2) \geq -M\} \geq \int_{-1}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

Or f est centrée ($c_0 = 0$) et pour tout q : $\frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} f\left(\frac{j}{q}\right) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} c_{rq} > 0$.

On fixe alors $N_1 \geq N_0$ tel que : $(3) = \sqrt{N_1} \frac{1}{q_r} \sum_{j=0}^{q_r - 1} f\left(\frac{j}{q_r}\right) > M + 1$.

Il reste à choisir a_{r+1} (qui déterminera q_{r+1}) afin que $N_1 \sqrt{N_1} K(f) \frac{1}{q_r q_{r+1}} \leq \frac{1}{2}$.

Ainsi $P(\mathcal{E}) \geq \int_{-1}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} - \varepsilon$. On construit une sous-suite (N_k) et un angle α empêchant la convergence de $P(\mathcal{E})$ vers $\frac{1}{2}$. Le TCL n'est donc pas vérifié pour la sous-suite (N_k).

4.3 Une classe de fonctions et d'angles ne vérifiant pas le TCL.

Dans le paragraphe précédent, on a simplement voulu obtenir un contre-exemple explicite au TCL. Nous allons affiner les calculs.

- Tout d'abord : $E\left[|(1)|\right] \leq K(f) \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{k} \left| \alpha - \frac{p_r}{q_r} \right| \leq \frac{2}{3} K(f) \frac{N}{q_r q_{r+1}}$.

- On suppose que dans le TCL, cas discret, il existe C_I telle que pour toute réduite $\frac{p_r}{q_r}$, on ait :

$$\left| P\{|(2)| \leq M\} - \int_{-\frac{M}{\sigma_r}}^{\frac{M}{\sigma_r}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \right| \leq \frac{C_I ||g||_\infty}{N^{\frac{1}{4}}} \text{ (inégalité d'Ibragymov).}$$

- On prend comme précédemment $M = 2\sigma_r$, puis N_0 tel que $\frac{C_I ||g||_\infty}{N_0^{\frac{1}{4}}} \leq \frac{1}{8}$.

Ainsi $P\{|(2)| \leq M\} > 0,8$.

On choisit ensuite $N_1 \geq N_0$ pour que $\sqrt{N_1} \left| \sum_{r \in \mathbb{Z}} C_{rq_r} \right| \geq M + 1$ et finalement q_{r+1} tel que:

$$P\{|(1)| \geq 1\} \leq \frac{2}{3} \frac{K(f) N_1}{q_r q_{r+1}} \leq \frac{1}{8}.$$

On obtiendra une contradiction en extrayant une nouvelle sous-suite de la suite (N_k), puisque $P(\mathcal{E})$ ou $P(\text{“}-\mathcal{E}''\text{)}$ ne tendra pas vers $\frac{1}{2}$.

Théorème 4.1
Soit f lipschitzienne, (C_l) ses cœfficients de Fourier. Soit (q_l), la suite des dénominateurs des réduites de α. S'il existe une infinité d'entiers r tels que le couple (q_r, q_{r+1}) vérifie :
- $\sum_{k\in\mathbb{Z}} C_{kq_r} \neq 0$.
- $q_r q_{r+1} \geq \max\left\{\frac{16}{3}K(f)\frac{(2\sigma_r+1)^2}{\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} C_{kq_r}\right|^2},\ 4096\,(C_I\|g\|_\infty)^4\right\}$, *alors le TCL n'est pas vérifié.*

4.4 Un calcul explicite.

4.4.1 Majoration de σ_r.

Pour la suite, on note $f_1 = f - \frac{1}{q_r}\sum_{j=0}^{q_r-1} f\left(\frac{j}{q_r}\right)$ et on rappelle que :

$$\sigma_r^2 = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}E\left[(S_N f_1)^2\right].$$

On a alors :

$$E\left[(S_N f_1)^2\right] = \|f_1\|_2^2 + 2\sum_{l=1}^{N}\left(1-\frac{l}{N}\right)\langle f_1, P^l_{\frac{p_r}{q_r}}(f_1)\rangle.$$

Or,
$$\langle f_1, P^l_{\frac{p_r}{q_r}}(f_1)\rangle = \frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} f_1\left(\frac{j}{q_r}\right)P^l_{\frac{p_r}{q_r}}(f_1)\left(\frac{j}{q_r}\right),$$

que l'on majore par :

$$\begin{aligned}\left|\langle f_1, P^l_{\frac{p_r}{q_r}}(f_1)\rangle\right| &\leq \frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1}\left|f_1\left(\frac{j}{q_r}\right)\right| A\|f_1\|_\infty e^{-\frac{bl}{2q_r^2}}\\ &\leq A\|f_1\|_\infty^2 e^{-\frac{bl}{2q_r^2}}.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\sigma_r^2 &\leq \|f_1\|_2^2 + 2A\|f_1\|_\infty^2\lim_{N\to+\infty}\sum_{l=1}^{N}\left(1-\frac{l}{N}\right)e^{-\frac{bl}{2q_r^2}}\\ &\leq \|f_1\|_2^2 + 2A\|f_1\|_\infty^2\frac{1}{1-e^{-\frac{b}{2q_r^2}}}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\sigma_r^2 \leq 4\|f\|_\infty^2\left(1+\frac{2A}{1-e^{-\frac{b}{2}}}q_r^2\right).$$

4.4.2 Majoration de $\|g\|_\infty$.

On rappelle que :

$$g\left(j\frac{p}{q}\right) = \sum_{k=1}^{q-1}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} C_{k+lq}\right)\frac{1}{2\sin^2\left(\pi\frac{p}{q}k\right)}e^{2i\pi k\frac{p}{q}j}$$

Il en résulte :

$$
\begin{aligned}
||g||_\infty &\leq \left(\sup_{k=1}^{q-1}\left|\sum_{l\in\mathbb{Z}} C_{k+lq}\right|\right)\sum_{k=1}^{\frac{q}{2}}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{q}} \\
&\leq \left(\sup_{k=1}^{q-1}\left|\sum_{l\in\mathbb{Z}} C_{k+lq}\right|\right)\sum_{k=1}^{\frac{q}{2}}\frac{q^2}{(2k)^2} \\
&\leq \frac{\pi^2}{24}\left(\sup_{k=1}^{q-1}\left|\sum_{l\in\mathbb{Z}} C_{k+lq}\right|\right)q^2.
\end{aligned}
$$

4.4.3 Exemple.

Soit $m > 2$. On suppose $C_l = 0$ si $l \leq 0$ et $C_l = \frac{1}{l^m}$ sinon. Alors : $||g||_\infty \leq \dfrac{\pi^2}{24}q^{2-m}\displaystyle\sum_{l\geq 1}\frac{1}{l^m}$. Ceci tend vers 0 quand q tend vers l'infini. En reprenant la formule du paragraphe 3.3, il suffit de vérifier :

$$
q_r q_{r+1} \geq \frac{16}{3}K(f)\frac{(2\sigma_r+1)^2}{\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} C_{kq_r}\right|^2},\ \text{c'est à dire :}
$$

$$
q_r q_{r+1} \geq \frac{32}{3}\left(\sum_{l\geq 1}\frac{1}{l^{m-1}}\right)q_r^{2m}\left[16\left(\sum_{l\geq 1}\frac{1}{l^m}\right)^2\left(1+\frac{2A}{1-e^{-\frac{b}{2}}}q_r^2\right)+1\right].
$$

En tenant compte des valeurs de A et de b et du fait que $\displaystyle\sum_{l\geq 1}\frac{1}{l^{m-1}} \leq 1+\frac{1}{m-2}$, on obtient :

$$
q_{r+1} \geq 4160\left(1+\frac{1}{m-2}\right)q_r^{2m+1}.
$$

Théorème 4.2
Pour $m > 2$, soit la fonction dont les cœfficients de Fourier sont : $C_l = 0$ si $l \leq 0$ et $C_l = \frac{1}{l^m}$ sinon. Alors, le TCL n'est pas vérifié pour la classe d'angles dont le développement en fraction continue est tel qu'il existe une infinité de couples (q_r, q_{r+1}) avec $q_{r+1} \geq 4160\left(1+\dfrac{1}{m-2}\right)q_r^{2m+1}$.

5 Annexe.

5.1 Calcul de $\displaystyle\sum_{p=0}^{k}|2p-k|C_k^p$.

On suppose k pair (le cas impair se traite de la même manière). Soit donc $k = 2l$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{k}|2p-k|C_k^p &= 2\sum_{p=0}^{2l}|p-l|C_{2l}^p \\
&= 2\sum_{p=0}^{l}p\left(C_{2l}^{l+p}+C_{2l}^{l-p}\right) \\
&= 4\sum_{p=0}^{l}(l-p)C_{2l}^p \\
&= 4l\sum_{p=0}^{l}C_{2l}^p - 4\sum_{p=1}^{l}\frac{(2l)!}{(2l-p)!(p-1)!} \\
&= 4l\left[C_{2l}^l+\frac{1}{2}\left(2^{2l}-C_{2l}^l\right)\right]-8l\sum_{p=0}^{l-1}C_{2l-1}^p \\
&= 2l\left(2^{2l}+C_{2l}^l\right)-8l\frac{1}{2}2^{2l-1} \\
&= 2lC_{2l}^l = 2l\frac{(2l)!}{(l!)^2}.
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Stirling, on obtient donc :

$$\sum_{p=0}^{k}|2p-k|C_k^p \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{k}2^k.$$

5.2 Série de Fourier d'une fonction höldérienne d'ordre $s > \frac{1}{2}$.

Soit f, 1-périodique, telle que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}$, $|f(x)-f(y)|\leq K(f)\,|x-y|^s$, avec $s>\frac{1}{2}$.

– Pour $h>0$, on a $\displaystyle\int_0^1 |f(x+h)-f(x-h)|\,dx = \sum_{n\in Z}4\sin(2\pi nh)^2\,|c_n|^2$.

– Pour $k\geq 0$, on choisit $h_k=\dfrac{1}{2^{k+3}}$. Il en résulte : $\displaystyle\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}|c_n|^2\leq\frac{K(f)^2}{2}\left(2h_k\right)^{2s}$.

– Si on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient : $\displaystyle\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}|c_n|\leq\frac{K(f)}{2^{\frac{1}{2}+2s}}2^{k\left(\frac{1}{2}-s\right)}$, ce qui assure la convergence normale de la série de Fourier. On en déduit également une estimation du reste :

$$\sum_{|n|\geq p}|c_n|\leq\frac{K(f)}{2^s-2^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{p^{s-\frac{1}{2}}}\right).$$

Références.

[1] P. Diaconis, *Applications of non-commutative Fourier analysis to probability problems*, LN 1362, S^t Flour 86.

[2] H. Niederreiter, *Quasi-Monte Carlo methods and pseudo-random numbers*, Bulletin of the AMS, vol 84, numéro 6, novembre 78.

[3] F. Su, *Convergence of random walks on the circle generated by an irrational rotation*, F.Su, Transactions of the AMS, vol 350, numéro 9, septembre 1998.

[4] *Chaînes de Markov sur le cercle*, mémoire de DEA de l'Université de Rennes 1.